

TÉCNICAS EM OLIMPIÁDAS DE MATEMÁTICA - ÁLGEBRA

Marcelo Rufino de Oliveira



268 problemas resolvidos

175 problemas com dicas ou respostas

TÉCNICAS EM OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA

Álgebra

Marcelo Rufino de Oliveira

Com formação pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Coordenador das Turmas Militares do Colégio Ideal

Professor de Matemática das Turmas Militares do Colégio Ideal

Coordenador Regional da Olimpíada Brasileira de Matemática

1ª edição (2014)

APRESENTAÇÃO À 1ª EDIÇÃO

A motivação

A cada ano as Olimpíadas de Matemática vêm se popularizando mais e mais em nosso país. No início das competições nacionais no Brasil, em 1979, poucos eram os alunos que participavam da competição. Entretanto, mas recentemente, a quantidade de alunos inscritos nas diversas olimpíadas de matemática aplicadas (desde estaduais, nacionais e internacionais) em nosso território tem alcançado números impressionantes. Em 2011 mais de 350 mil alunos participaram da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), competição de âmbito nacional mais antiga do Brasil, aberta a todos os alunos matriculados desde a 6ª série do Ensino Fundamental até o nível superior (graduação). Se observarmos a OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas –, criada em 2005 pelo governo federal, os números são ainda mais impactantes. Em 2012 foram inscritos mais de 20 milhões de estudantes, de um total de mais de 46 mil escolas.

Os números mostram que já é possível identificar uma cultura da olimpíada de matemática no Brasil. Até pouco tempo atrás a grande maioria dos alunos brasileiros não saberia dizer o que é uma olimpíada de matemática, porém hoje este quadro mudou, e a grande maioria já sabe quais são as principais características de uma olimpíada de matemática. Apesar disso, é muito pequena a quantidade de livros específicos sobre olimpíadas de matemática em língua portuguesa. Existem excelentes livros sobre o assunto, vendidos no mundo todo e usados por alunos que desejam se preparar para competições matemáticas dos mais diversos níveis, mas a grande maioria escritos em inglês. É evidente que o conteúdo padrão de qualquer prova de olimpíada não difere muito do que é trabalhado nas escolas, entretanto os alunos que participam há algum tempo deste tipo de competição sabem que determinados tópicos são mais cobrados e também que as questões típicas de olimpíada de matemática acabam por exigir do aluno uma criatividade maior que as questões de vestibular. Assim, alunos que se interessam por olimpíadas de matemática, em geral, necessitam de um material que permita aprofundar seus estudos em determinados assuntos, tais como geometria plana, teoria dos números, álgebra e combinatória. Recentemente, em uma cerimônia de premiação da OBMEP, foi entregue a alunos premiados uma versão traduzida para o português de um famoso livro russo de preparação para olimpíadas de matemática. Isso comprova que precisamos de mais títulos em português sobre este tema.

Desta necessidade surgiu a ideia de escrever a coleção "Técnicas em Olimpíadas de Matemática". O objetivo claro e declarado desta coleção é suprir esta imensa carência de livros em língua portuguesa específicos sobre olimpíada de matemática. O autor deste livro leciona aulas de olimpíadas de matemática para os alunos da cidade de Belém desde 2000 e esta obra é, basicamente, uma compilação do material usado em sala de aula nestes anos todos de experiência. Soma-se a isso também o fato do autor ser coordenador regional da OBM em Belém desde 2000, tendo aplicado e corrigido as provas da OBM ao longo de todos estes anos e de ter participado em 2002 da banca corretora da XIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul, realizada em Fortaleza. O autor também tem a honra de ter contribuído um pouco para a premiação de diversos alunos paraenses na Olimpíada Brasileira de Matemática.

Espera-se que todos os volumes desta coleção sejam bastante úteis no aprofundamento dos estudos dos alunos que estejam se preparando para participar de qualquer competição de matemática, seja em âmbito regional, nacional ou internacional.

Assuntos

As questões propostas nas provas de Olimpíadas de Matemática podem ser agrupadas em 4 grandes áreas da Matemática, a saber: Combinatória, Geometria, Teoria dos Números e Álgebra. Dependendo do tipo de olimpíada (regional, nacional ou internacional), o percentual de questões de cada uma destas áreas pode variar de maneira considerável. Abaixo o leitor pode verificar um levantamento feito pelo próprio autor deste livro, sobre os percentuais da divisão de questões por assuntos em três competições com distintas abrangências, sendo uma regional (Olimpíada Paraense de Matemática, aplicada desde 2000), uma nacional (Olimpíada Brasileira de Matemática, aplicada desde 1979) e uma internacional (Olimpíada Internacional de Matemática, aplicada desde 1959). O estudo foi feito levando em consideração suas fases finais e apenas o nível de alunos do Ensino Médio.

	Combinatória	Geometria	Teoria dos Números	Álgebra
Olimpíada Paraense de Matemática, 2000 a 2012	30,8%	24,6%	24,6%	20,0%
Olimpíada Brasileira de Matemática, 1979 a 2012	27,5%	29,6%	24,3%	18,5%
Olimpíada Internacional de Matemática, 1959 a 2013	17,5%	33,4%	21,2%	27,9%

O estudo realizado pelo autor deste livro não possui nenhuma intenção de ser definitivo, até porque das competições citadas no estudo, Marcelo Rufino de Oliveira tem participação direta apenas na Olimpíada Paraense de Matemática. Além disso, deve-se levar em consideração que diversas questões cobram conceitos de mais de uma área, em particular pode-se identificar uma grande quantidade de casos em que uma mesma questão de olimpíada de matemática que exige conhecimento de álgebra e teoria dos números. Assim, se outro matemático executar o mesmo levantamento é natural que encontre outros valores percentuais sensivelmente diferentes dos listados na tabela.

Observando a tabela é notório que olimpíadas com abrangência regional procurem exigir do aluno mais criatividade e menos conhecimento técnico, enquanto que em olimpíadas internacionais a quantidade de questões de raciocínio é reduzida, sendo o peso de geometria e álgebra bem maior (mais de 60%). Na verdade, estes resultados podem ser considerados esperados, uma vez que não há como exigir de alunos de uma região de um país um total domínio dos teoremas mais aprofundados de geometria e teoria dos números. Por outro lado, se espera que um aluno participante das últimas fases de uma olimpíada nacional ou internacional possua bem mais familiaridade com estes teoremas e tenha mais facilidade em desenvolver os algebrismos exigidos nestas competições.

É também necessário destacar que desde as primeiras provas de olimpíadas de matemática, na Hungria no final do século XIX, os assuntos que são mais cobrados neste tipo de competição pouco mudaram. Tópicos como matrizes, geometria analítica, números complexos, trigonometria ou logaritmo são raríssimos em olimpíadas de matemática.

Organização da coleção

"Técnicas em Olimpíadas de Matemática" é uma coleção de 4 volumes, todos voltados para a resolução de problemas de olimpíadas de matemática:

Volume 1: Combinatória
Volume 2: Teoria dos Números
Volume 3: Álgebra
Volume 4: Geometria Plana

Este volume contém os tópicos mais relevantes da área de Álgebra, sendo dividido em 12 capítulos. Os primeiros 6 capítulos possuem basicamente a mesma estrutura. Inicialmente é apresentada, na opinião do autor do livro, a aplicação e relevância daquele assunto dentro do universo das questões de olimpíadas de matemática. Depois há um resumo teórico, contando com as definições mais relevantes e os principais teoremas de cada tema. Em seguida são apresentadas as soluções de alguns exercícios de olimpíadas de matemática. As questões propostas são separadas em duas categorias, parte A e parte B, aproximadamente com o mesmo número de questões. Nos capítulos de 7 a 12 todas as questões da parte A estão resolvidas, enquanto que as questões da parte B possuem apenas a resposta e/ou a dica necessária para sua resolução. Somente neste volume existem **443** questões de olimpíadas de matemática, sendo **268** totalmente resolvidas e outras **175** com dicas de solução e/ou respostas.

Este sistema de dicas foi adotado para a parte B a fim que o leitor tente resolver as questões e não fique apenas lendo as resoluções. As quantidades de questões propostas em cada capítulo são proporcionais às frequências com que aparecem em provas de olimpíadas de matemática. Por exemplo, neste volume há mais questões propostas de desigualdades que de seqüências, uma vez que o primeiro assunto é mais recorrente que o segundo.

Como utilizar melhor este livro

Este livro será mais bem aproveitado se o leitor tentar resolver, mesmo que isto demore algum tempo, os exercícios propostos antes de ler a solução ou possíveis dicas. Livros com questões resolvidas acabam iludindo os leitores que não tentam resolver os problemas propostos por eles já virem acompanhados das respectivas soluções. Em geral, a simples leitura da solução de uma questão, sem a prévia tentativa de resolução, não representa algo significativo para o leitor e os principais detalhes da solução acabam por cair no esquecimento.

Professores também podem utilizar este livro em suas aulas de olimpíadas de matemática, haja vista que este material foi todo desenvolvido a partir de notas de aula de olimpíadas de matemática do próprio autor.

O autor

Índice

1. Operações Algébricas	
1.1. Relevância e Aplicação	3
1.2. Resumo Teórico	3
1.3. Exemplos Resolvidos	5
1.4. Exercícios Propostos – Parte A	8
1.5. Exercícios Propostos – Parte B	12
2. Funções	
2.1. Relevância e Aplicação	15
2.2. Resumo Teórico	15
2.3. Exemplos Resolvidos	16
2.4. Exercícios Propostos – Parte A	22
2.5. Exercícios Propostos – Parte B	26
3. Desigualdades	
3.1. Relevância e Aplicação	30
3.2. Resumo Teórico	30
3.3. Exemplos Resolvidos	31
3.4. Exercícios Propostos – Parte A	36
3.5. Exercícios Propostos – Parte B	42
4. Polinômios	
4.1. Relevância e Aplicação	46
4.2. Resumo Teórico	46
4.3. Exemplos Resolvidos	49
4.4. Exercícios Propostos – Parte A	53
4.5. Exercícios Propostos – Parte B	57
5. Sequências	
5.1. Relevância e Aplicação	61
5.2. Resumo Teórico	61
5.3. Exemplos Resolvidos	61
5.4. Exercícios Propostos – Parte A	65
5.5. Exercícios Propostos – Parte B	68

6. Trigonometria	71
6.1. Relevância e Aplicação	71
6.2. Resumo Teórico	73
6.3. Exemplos Resolvidos	76
6.4. Exercícios Propostos – Parte A	78
6.5. Exercícios Propostos – Parte B	
 Soluções e Dicas	
7. Operações Algébricas	83
7.1. Parte A	92
7.2. Parte B	
 8. Funções	94
8.1. Parte A	109
8.2. Parte B	
 9. Desigualdades	111
9.1. Parte A	130
9.2. Parte B	
 10. Polinômios	133
10.1. Parte A	149
10.2. Parte B	
 11. Sequências	152
11.1. Parte A	161
11.2. Parte B	
 12. Trigonometria	163
12.1. Parte A	171
12.2. Parte B	
 Referências Bibliográficas	173

ÁLGEBRA

OPERAÇÕES ALGÉBRICAS

1.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Base de todo o estudo da álgebra, é difícil encontrar uma prova de olimpíada de matemática que, se não cobrado diretamente numa questão de álgebra, não possua pelo menos uma questão que exija conhecimento sobre fatoração ou produtos notáveis.

É muito comum aparecer em provas de olimpíadas de matemática de ensino fundamental questões sobre fatorações e produtos notáveis. Nas provas de ensino médio é mais comum encontrar estes conceitos sendo cobrados em questões de teoria dos números, funções, polinômios ou somatórios.

1.2. RESUMO TEÓRICO

Produtos Notáveis:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

Fatorações:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^4 - y^4 = (x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$$

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

$$x^6 - y^6 = (x - y)(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)$$

$$x^6 - y^6 = (x + y)(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5)$$

Generalizando:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - x^2y^{n-3} + xy^{n-2} - y^{n-1}), \text{ com } n \text{ par};$$

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1}), \text{ com } n \text{ ímpar}.$$

Relações de Newton

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ as raízes da equação $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + a_4x^{n-4} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$. Pelas relações de Girard sabe-se que:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_2$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3$$

...

$$x_1x_2\dots x_n = (-1)^na_n$$

Agora será desenvolvida uma técnica para o cálculo de $S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ou seja, a soma das k -ésimas potências das raízes de uma equação algébrica.

Para $k = 1$ a soma se reduz à primeira relação de Girard:

$$S_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1 \Rightarrow S_1 + a_1 = 0$$

Na determinação de S_2 pode-se fazer o seguinte:

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n) \Rightarrow$$

$$a_1^2 = S_2 + 2a_2 \text{ ou } S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0$$

S_3 pode ser obtido observando as seguintes expressões:

$$(x_1 + \dots + x_n)(x_1^2 + \dots + x_n^2) = (x_1^3 + \dots + x_n^3) + (x_1x_2^2 + \dots + x_nx_{n-1}^2)$$

$$x_1x_2^2 + \dots + x_nx_{n-1}^2 = (x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n)(x_1 + \dots + x_n) - 3(x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)$$

Somando estas duas últimas expressões:

$$-a_1S_2 = S_3 + a_2S_1 + 3a_3 \Rightarrow S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0$$

Para o cálculo de S_4 tem-se:

$$(x_1 + \dots + x_n)(x_1^3 + \dots + x_n^3) = (x_1^4 + \dots + x_n^4) + (x_1x_2^3 + \dots + x_nx_{n-1}^3)$$

$$x_1x_2^3 + \dots + x_nx_{n-1}^3 = (x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n)(x_1^2 + \dots + x_n^2) - (x_1^2x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n^2)$$

$$-(x_1^2x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n^2) =$$

$$= -(x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)(x_1 + \dots + x_n) + 4(x_1x_2x_3x_4 + \dots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n)$$

Somando as três equações:

$$-a_1S_3 = S_4 + a_2S_2 + a_3S_1 + 4a_4 \Rightarrow S_4 + a_1S_3 + a_2S_2 + a_3S_1 + 4a_4 = 0$$

No caso do cálculo de S_5 pode-se fazer o seguinte:

$$(x_1 + \dots + x_n)(x_1^4 + \dots + x_n^4) = (x_1^5 + \dots + x_n^5) + (x_1x_2^4 + \dots + x_nx_{n-1}^4)$$

$$x_1x_2^4 + \dots + x_nx_{n-1}^4 = (x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n)(x_1^3 + \dots + x_n^3) - (x_1^3x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n^3)$$

$$-(x_1^3x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n^3) =$$

$$= -(x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)(x_1^2 + \dots + x_n^2) + (x_1^2x_2x_3x_4 + \dots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n^2)$$

$$x_1^2x_2x_3x_4 + \dots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n^2 = (x_1x_2x_3x_4 + \dots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n)(x_1 + \dots + x_n) -$$

$$-5(x_1x_2x_3x_4x_5 + \dots + x_{n-4}x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n)$$

$$\text{Somando as equações: } -a_1S_4 = S_5 + a_2S_3 + a_3S_2 + a_4S_1 + 5a_5 \Rightarrow$$

$$S_5 + a_1S_4 + a_2S_3 + a_3S_2 + a_4S_1 + 5a_5 = 0$$

Desta forma, as relações de Newton são:

$$S_1 + a_1 = 0$$

$$S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0$$

$$S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0$$

$$S_4 + a_1S_3 + a_2S_2 + a_3S_1 + 4a_4 = 0$$

$$S_5 + a_1S_4 + a_2S_3 + a_3S_2 + a_4S_1 + 5a_5 = 0$$

$$S_6 + a_1S_5 + a_2S_4 + a_3S_3 + a_4S_2 + a_5S_1 + 6a_6 = 0$$

$$S_7 + a_1S_6 + a_2S_5 + a_3S_4 + a_4S_3 + a_5S_2 + a_6S_1 + 7a_7 = 0$$

...

$$S_n + a_1S_{n-1} + a_2S_{n-2} + a_3S_{n-3} + \dots + a_{n-1}S_1 + a_n = 0$$

1.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) (Pará-2005) Sejam x e y números reais tais que $x + y = 26$ e $x^3 + y^3 = 5408$. Calcule $x^2 + y^2$.

Solução:

Elevando $x + y$ ao cubo obtém-se

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

Por outro lado, sabe-se que $(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 2xy$

$$\text{Assim: } (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)](x + y)/2 \Rightarrow$$

$$17576 = 5408 + 3(676 - P)(26)/2 \Rightarrow P = 364$$

2) (Pará-2003) Se a, b e c são reais não nulos satisfazendo:

$$a^2 - b^2 = bc \text{ e } b^2 - c^2 = ac. \text{ Prove que } a^2 - c^2 = ab.$$

Solução:

$$a^2 - b^2 = bc \Rightarrow a^2 = b^2 + bc = b(b + c) \Rightarrow b + c = \frac{a^2}{b}.$$

$$b^2 - c^2 = ac \Rightarrow (b + c)(b - c) = ac \Rightarrow \frac{a^2}{b}(b - c) = ac \Rightarrow$$

$$a(b - c) = bc \Rightarrow ab - ac = bc \Rightarrow ab = bc + ac$$

$$\text{Assim: } a^2 - c^2 = (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) = bc + ac = ab$$

3) Dado $a + b + c + d = 0$, prove que:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + bcd + cda + dab).$$

Solução:

$$a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b = -(c + d) \Rightarrow (a + b)^3 = -(c + d)^3 \Rightarrow$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 - 3c^2d - 3cd^2 - d^3 \Rightarrow$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3(a^2b + ab^2 + c^2d + cd^2) \Rightarrow$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3[ab(a + b) + cd(c + d)] \Rightarrow$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3[ab(-c - d) + cd(-a - b)] \Rightarrow$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + abd + acd + bcd)$$

4) Se a , b e c são números reais não-nulos satisfazendo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}, \text{ prove que entre os números } a, b \text{ e } c \text{ devem existir}$$

dois que são opostos.

Solução:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow$$

$$(ab+ac+bc)(a+b+c) = abc \Rightarrow$$

$$a^2b + ab^2 + abc + a^2c + abc + ac^2 + abc + b^2c + bc^2 = abc \Rightarrow$$

$$(a^2b + ab^2) + (a^2c + 2abc + b^2c) + ac^2 + bc^2 = 0 \Rightarrow$$

$$ab(a+b) + c(a^2 + 2ab + b^2) + c^2(a+b) = 0 \Rightarrow$$

$$(a+b)ab + c(a+b)^2 + c^2(a+b) = 0 \Rightarrow$$

$$(a+b)[ab + c(a+b) + c^2] = 0 \Rightarrow$$

$$(a+b)(ab + ac + bc + c^2) = 0 \Rightarrow (a+b)[a(b+c) + c(b+c)] = 0 \Rightarrow$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) = 0$$

Logo, um dos termos algébricos deverá ser igual a zero, fazendo com $a = -b$ ou $b = -c$ ou $a = -c$.

5) (Irlanda-93) Os números reais α e β satisfazem as equações:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0 \text{ e } \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0.$$

Determine $\alpha + \beta$.

Solução:

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^3 + 2\alpha - 16 = 0$$

$$\beta^3 - 2\beta^2 + 5\beta + 11 = 0 \Leftrightarrow (\beta - 1)^3 + 2\beta + 12 = 0$$

$$\text{Somando: } (\alpha - 1)^3 + (\beta - 1)^3 + 2\alpha + 2\beta - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha + \beta - 2)[(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 - (\alpha - 1)(\beta - 1)] + 2(\alpha + \beta - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha + \beta - 2)[(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 - (\alpha - 1)(\beta - 1) + 2] = 0 \Rightarrow$$

Existem duas possibilidades:

$$\text{i) } \alpha + \beta - 2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 2$$

$$\text{ii) } (\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 - (\alpha - 1)(\beta - 1) + 2 = 0$$

Fazendo $\alpha - 1 = x$ e $\beta - 1 = y$ tem-se que

$$x^2 + y^2 - xy + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - (y)x + 2 + y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(2 + y^2)}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{-3y^2 - 8}}{2}$$

Como o Δ desta equação é menor que zero então não existem reais x e y tais que $x^2 + y^2 - xy + 2 = 0$.

Logo, conclui-se que $\alpha + \beta = 2$.

6) (OBM-2001) Sejam a , b e c números reais não nulos tais que $a + b + c = 0$. Calcule os possíveis valores de $\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}$.

Solução:

$$\text{Seja } x = abc \text{ e } y = ab + ac + bc$$

$$\text{i) } a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 \Rightarrow$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3 \Rightarrow$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(-c) = -c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3x$$

$$\text{ii) } (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) = 0 \Rightarrow$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + b^3c + bc^3 = 0$$

$$\text{iii) } (a + b + c)^2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc) \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2y$$

$$\text{iv) } (a^2 + b^2 + c^2)(ab + ac + bc) =$$

$$= a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + b^3c + bc^3 + abc(a + b + c) \Rightarrow$$

$$a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + b^3c + bc^3 = -2y \cdot y = -2y^2$$

$$\text{v) } a^4 + b^4 + c^4 = -(a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + b^3c + bc^3) = 2y^2$$

$$\text{vi) } a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = -c^5 \Rightarrow$$

$$a^5 + b^5 + c^5 + 5ab(a^3 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2) = 0 \Rightarrow$$

$$a^5 + b^5 + c^5 + 5ab[(a + b)^3 - ab(a + b)] = 0 \Rightarrow$$

$$a^5 + b^5 + c^5 = 5abc^3 - 5a^2b^2c = 5abc(c^2 - ab) =$$

$$= 5abc[c(-a - b) - ab] = -5abc(ab + ac + bc) \Rightarrow$$

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5xy$$

$$\text{Logo: } \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2} = \frac{(3x)^2 2y^2}{(-5xy)^2} = \frac{18}{25}$$

7) (OBM-2007) Sejam a , b e c números tais que

$$a^2 - ab = 1$$

$$b^2 - bc = 1$$

$$c^2 - ac = 1$$

Calcule o valor de $abc \cdot (a + b + c)$.

Solução:

Como nenhum deles pode ser igual a zero, temos a forma equivalente:

$$a - b = \frac{1}{a}, \quad b - c = \frac{1}{b}, \quad c - a = \frac{1}{c}$$

$$\text{Somando as equações teremos } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \frac{ab + bc + ca}{abc} = 0 \Rightarrow$$

$$ab + bc + ca = 0.$$

$$\text{Em outra forma equivalente: } a^2 = 1 + ab, \quad b^2 = 1 + bc, \quad c^2 = 1 + ac.$$

$$\text{Multiplicando as equações: } a^2 b^2 c^2 = (1 + ab)(1 + bc)(1 + ca) \Leftrightarrow$$

$$a^2 b^2 c^2 = 1 + ab + bc + ca + a^2 bc + ab^2 c + abc^2 + a^2 b^2 c^2 \Leftrightarrow$$

$$0 = 1 + a^2 bc + ab^2 c + abc^2 + a^2 b^2 c^2 \Leftrightarrow abc(a + b + c) = -1$$

8) (Balcânica Jr.-97) Seja $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = k$. Determine o valor de

$$\frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8} \text{ em termos de } k.$$

Solução:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = k \Rightarrow \frac{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2}{x^4 - y^4} = k \Rightarrow \frac{x^4 + y^4}{x^4 - y^4} = \frac{k}{2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 + 1 = \frac{k}{2} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{k+2}{k-2} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{16} = \frac{(k+2)^4}{(k-2)^4}$$

$$\frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8} = \frac{(x^8 + y^8)^2 + (x^8 - y^8)^2}{x^{16} - y^{16}} = \frac{2(x^{16} + y^{16})}{x^{16} - y^{16}} =$$

$$= \frac{2 \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{16} + 1 \right]}{\left(\frac{x}{y}\right)^{16} - 1} = \frac{2 \left[\frac{(k+2)^4}{(k-2)^4} + 1 \right]}{\frac{(k+2)^4}{(k-2)^4} - 1} = \frac{2(k+2)^4 + 2(k-2)^4}{(k+2)^4 - (k-2)^4}$$

1.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) (OBM-2008) Sejam x e y números reais positivos satisfazendo as equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$. Calcule o valor de $\frac{1}{xy}$.

2) (OBM-2006) Sejam a e b números reais distintos tais que $a^2 = 6b + 5ab$ e $b^2 = 6a + 5ab$.

a) Determine o valor de $a + b$.

b) Determine o valor de ab .

3) Dado que $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$, calcule o valor de $a^{2000} + a^{2010} + 1$.

4) Dado que $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$, prove que:
 $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$.

5) (OBM-2006) Os dois números reais a e b são não nulos e satisfazem $ab = a - b$. Assinale a alternativa que exhibe um dos possíveis valores de $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$.

A) -2

B) $-\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

E) 2

6) (Pará-2004) a) Se $a^2 = 7b + 51$ e $b^2 = 7a + 51$, onde a e b são números reais distintos, determine o valor do produto ab .

b) Quando a , b e c são os três números racionais $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, o valor de:

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \frac{1}{(1/6)^2} + \frac{1}{(2/15)^2} + \frac{1}{(3/10)^2} =$$

$$36 + \frac{225}{4} + \frac{100}{9} = \frac{1296 + 2025 + 400}{36} = \frac{3721}{36} = \frac{61^2}{6^2} = \left(\frac{61}{6}\right)^2 \text{ é o quadrado de um número racional.}$$

Prove que este fato não é uma coincidência, ou seja, para quaisquer

valores de a , b e c racionais, a quantidade $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$ é

sempre o quadrado de um número racional.

7) Se $a, b, c, d > 0$ e $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$, prove que $a = b = c = d$.

8) (OBM-2005) Dado que $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{11}$, qual é o valor de

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} ?$$

9) Dado que $a + b = c + d$ e $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ prove que:
 $a^{2011} + b^{2011} = c^{2011} + d^{2011}$.

10) (OBM-2009) Observe:

$$(x-r)(x-s) = x^2 - (r+s)x + rs$$

Assim, substituindo x por r e por s , obtemos

$$\begin{cases} r^2 - (r+s)r + rs = 0 \\ s^2 - (r+s)s + rs = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(r^{n+2} - (r+s)r^{n+1} + rs \cdot r^n) = 0 \\ b(s^{n+2} - (r+s)s^{n+1} + rs \cdot s^n) = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações e sendo $S_n = a \cdot r^n + b \cdot s^n$, verifica-se que

$$S_{n+2} = (r+s)S_{n+1} - rsS_n$$

Dados $S_1 = ar + bs = 1$, $S_2 = ar^2 + bs^2 = 2$, $S_3 = ar^3 + bs^3 = 5$ e $S_4 = ar^4 + bs^4 = 6$, determine $S_5 = ar^5 + bs^5$.

11) (Lista Treinamento Cone Sul-2003) Sejam a, b, c e d números reais tais que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ e $ac + bd = 0$. Determine o valor de $ab + cd$.

12) (OBM-2010) Sejam a, b e c reais tais que $a \neq b$ e $a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2010$. Calcule $c^2(a+b)$.

13) (OBM-2010) Calcule

$$\frac{(2^4 + 2^2 + 1)(4^4 + 4^2 + 1)(6^4 + 6^2 + 1) \dots (32^4 + 32^2 + 1)}{(1^4 + 1^2 + 1)(3^4 + 3^2 + 1)(5^4 + 5^2 + 1) \dots (31^4 + 31^2 + 1)}$$

14) (Pará-2008) Suponha que x, y e z são números tais que $x+y+z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Mostre que $\frac{x^6 + y^6 + z^6}{x^3 + y^3 + z^3} = x \cdot y \cdot z$.

15) Prove que, se x, y e z , são números reais distintos e

$$\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0 \text{ então } \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0.$$

16) Prove que se $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ e $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, então $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

17) (Ceará-97) Se $x^2 + x + 1 = 0$, calcule o valor de

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \dots + \left(x^{27} + \frac{1}{x^{27}}\right)^2.$$

18) (Campina Grande-2004) Se x, y e z são reais distintos tais que $x^2 - y = y^2 - z = z^2 - x$. Mostre que $(x+y)(y+z)(z+x) = 1$.

19) Prove que se x, y, z são números reais com $x+y+z = 0$ então:

$$\frac{x^2 + y^2}{x+y} + \frac{y^2 + z^2}{y+z} + \frac{z^2 + x^2}{z+x} = \frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy}.$$

20) (Teste de Seleção Cone Sul-2007) Sejam a, b, c, x, y, z reais distintos tais que $ax + by + cz = 0$. Prove que $\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}$ não depende de x , nem de y e nem de z .

21) (Romênia-2002) Sejam x, y, z números reais positivos mais que $xyz(x+y+z) = 1$. Mostre que a seguinte igualdade é válida:

$$\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = (x+y)(y+z)(z+x).$$

22) (Romênia-2004) Sejam a, b, c números reais. Mostre que $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b+c}$ se e somente se $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$.

23) (Moldávia-2000) Os números inteiros a, b, c satisfazem à relação $a+b+c = 0$. Mostre que o número $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ é um quadrado perfeito.

24) (Pará-2011) Sejam a, b e c números reais não nulos tais que $a+b+c = 0$ e $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$. Calcule o valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

25) (Torneio das Cidades-94) Sejam a, b, c, d números reais tais que $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0$. Prove que a soma de um par destes números é igual a zero.

26) (Iberoamericana-89) Determinar todos os ternos de números reais que satisfazem o sistema de equações seguinte:

$$\begin{cases} x+y-z = -1 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ -x^3 + y^3 + z^3 = -1 \end{cases}$$

27) (IMO-59) Para quais valores de x temos

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = A, \text{ dado}$$

a) $A = \sqrt{2}$,

- b) $A = 1$,
 c) $A = 2$, onde somente números reais não negativos são permitidos nas raízes quadradas e os valores das raízes quadradas são apenas números positivos?

28) (IMO-63) Para quais valores reais de p a equação:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

possui raízes reais? Quais são as raízes?

1.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) (Argentina-97) Encontrar todos os valores de x que são soluções da equação $\sqrt{19-x} + \sqrt{97+x} = 14$.

2) Prove que o produto de quatro inteiros consecutivos, nenhum deles sendo 0, nunca é um quadrado perfeito.

3) (Argentina-98) Sejam x, y , números reais tais que $x + y = 26$, $x^3 + y^3 = 5408$. Calcular $x^2 + y^2$.

4) (Quebec-95) Consideremos as equações $xy = p$, $x + y = s$, $x^{1993} + y^{1993} = t$, $x^{1994} + y^{1994} = u$. Determine uma expressão, em termos de p, s, t, u , de $x^{1995} + y^{1995}$.

5) (Canadá-69) Mostre que se $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ e p_1, p_2, p_3 não são todos nulos, então

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n}$$

para todo inteiro positivo n .

6) (Canadá-74) Se $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, mostre que $y^x = x^y$.

7) (Apics-83) Dados os números x, y, z tais que $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Calcule $x^4 + y^4 + z^4$.

8) (Argentina-95) Determinar todos os números inteiros x que satisfazem $2^x(4-x) = 2x + 4$.

9) Denomina-se de número afortunado como um número que pode ser expresso por $3x^2 + 32y^2$, onde x e y são inteiros. Prove que se n é um número afortunado, então $97n$ também é.

10) (Ceará-92) Determine todos os valores reais de x, y e z que satisfazem a igualdade $3x^2 + y^2 + z^2 = 2xy + 2xz$.

11) (Argentina-2005) Se a e b são números reais que satisfazem $\frac{10b+a}{10a+b} + \frac{a}{2b} = 2$. Calcular $\frac{b}{a}$ e dar todas as possibilidades.

12) Assuma que x, y e z são números positivos tais que satisfazem as equações abaixo. Determine o valor de $x + y + z + xyz$.

$$x + y + xy = 8$$

$$y + z + yz = 15$$

$$z + x + zx = 35$$

13) (Minas Gerais-2007) Sejam a e b números positivos tais que

$$\left(\sqrt{a} + \frac{b^2}{2}\right)^2 = 3b^4. \text{ O valor de } \frac{5b^4}{a+b^2\sqrt{a}} \text{ é:}$$

a) $20/11$ b) $15/11$ c) $10/11$ e) $5/11$

14) Sejam x, y, z números reais não nulos e tais que $x + y + z = 0$. Calcule o valor da expressão

$$\frac{x^3}{(y+z)^3} + \frac{y^3}{(x+z)^3} + \frac{z^3}{(x+y)^3}$$

15) Calcule o valor de

$$N = \frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}$$

16) (Campina Grande-2002) Se a, b, c são números reais não nulos tais que $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$ e $x = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ e $x < 0$.

Então, x é igual a:

A) -2 B) -4 C) -6 D) -8 E) -1

17) (Ceará-97) Sejam a, b, c , números reais positivos distintos dois a dois tais que $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Prove que o produto $(a-c)(b-c)$ é negativo.

18) (Rússia-68) Prove a igualdade:

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-9} + \dots + \frac{20}{x^2-100} =$$

$$= 11 \left[\frac{1}{(x-1)(x+10)} + \frac{1}{(x-2)(x+9)} + \dots + \frac{1}{(x-10)(x+1)} \right]$$

19) (Ceará-84) Sejam a e b números reais, não nulos simultaneamente.

Se $x = \frac{4a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $y = \frac{4b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, calcule o valor de $(x+y)^2 - 2xy$.

20) Sejam x , y , e z números complexos tais que $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=3$ e $xyz=4$. Calcule o valor de

$$\frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$$

21) (Ceará-2001) Achar todos os números x , y tais que:

$$(1-x)^2 + (x-y)^2 + y^2 = \frac{1}{3}.$$

22) (Finlândia-2012) Sejam x , y , z números reais tais $x \neq 1$, $y \neq 1$ e $x \neq y$.

Mostre que se $\frac{yz-x^2}{1-x} = \frac{zx-y^2}{1-y}$ então $\frac{yz-x^2}{1-x} = \frac{zx-y^2}{1-y} = x+y+z$.

23) (Holanda-83) Sejam a , b , c e p números reais, com a , b e c não todos iguais, tais que $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p$. Determine todos os valores possíveis de p e prove que $abc + p = 0$.

24) Prove que se $a+b+c=0$ então:

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

25) (Irlanda-94) Sejam w , a , b , c números reais distintos com a propriedade que existem números reais x , y , z para os quais as seguintes equações valem:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ xa^2 + yb^2 + zc^2 &= w^2 \\ xa^3 + yb^3 + zc^3 &= w^3 \\ xa^4 + yb^4 + zc^4 &= w^4 \end{aligned}$$

Expresse w em termos de a , b , c .

FUNÇÕES

2.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Assunto bastante cobrado nas provas de olimpíadas de matemática de ensino médio, sobretudo nas últimas fases de olimpíadas nacionais e internacionais. Praticamente há apenas um tipo de questão sobre funções, onde deve-se determinar todas as funções que satisfazem uma dada equação funcional.

2.2. RESUMO TEÓRICO

Definição: Função é uma relação entre os conjuntos A e B de modo que todo elemento do conjunto A esteja relacionado com um (e apenas um!) elemento de B . O conjunto A é denominado de domínio da função e B o contra-domínio. Imagem é o conjunto dos elementos do contra-domínio ligados pela função. Por exemplo, em uma função f de domínio A e contra-domínio B , se $a \in A$ e $f(a) = b$ então $b \in \text{Im}(f)$. Observe que $\text{Im} \subset B$.

Função par: Uma função $f: A \rightarrow B$ é par se para cada $x \in A$ tem-se $f(x) = f(-x)$.

Função ímpar: Uma função $f: A \rightarrow B$ é ímpar se para cada $x \in A$ tem-se $f(-x) = -f(x)$.

Função sobrejetora: Quando o contradomínio e a imagem de uma função são iguais.

Função injetora: Se $a \neq b$ então $f(a) \neq f(b)$.

Função bijetora: Quando uma função é ao mesmo tempo sobrejetora e injetora.

Função inversa: Sendo $f: A \rightarrow B$ uma função bijetora, chama-se função inversa de f , a função $f^{-1}: B \rightarrow A$ tal que se (a, b) pertence a f então (b, a) pertence a f^{-1} . Só pode existir a função $f^{-1}(x)$ se $f(x)$ for bijetora.

Funções Composta: Dado $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, chama-se de função composta de g e f a função de $A \rightarrow C$ definida por $g(f(x))$ para todo x pertencente a A , e representa-se por $g \circ f(x)$.

Raiz ou zero de uma função: Os pontos onde o gráfico da função corta o eixo do x são chamados de raízes ou zeros da função.

Sinal de uma função: A função é dita positiva ($f(x) > 0$) em todos os pontos acima do eixo do x e negativa ($f(x) < 0$) em todos os pontos abaixo do eixo do x .

Função Estritamente Crescente: se $a > b$ então $f(a) > f(b)$

Função Estritamente Decrescente: se $a > b$ então $f(a) < f(b)$

Função Crescente ou Não Decrescente: se $a > b$ então $f(a) \geq f(b)$

Função Decrescente ou Não Crescente: se $a > b$ então $f(a) \leq f(b)$

2.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Solução:

$$x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$y = -x \Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

$$y = x \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$$

$$y = 2x \Rightarrow f(3x) = 3f(x)$$

Por indução conclui-se que $f(nx) = nf(x)$

Para um número racional $x = m/n$ tem-se:

$$nx = m.1 \Rightarrow f(nx) = f(m.1) = nf(x) = mf(1) \Rightarrow f(x) = (m/n)f(1) \Rightarrow$$

$$f(x) = xf(1) \text{ para todo } x \text{ racional}$$

Suponhamos que $f(x)$ seja contínua. Se x for irracional, podemos sempre escolher um racional x_n cujo limite tende para x .

Devido a continuidade de $f(x)$ e $f(x_n) = x_n f(1)$, quando x_n tende para x irracional, temos que $f(x) = xf(1)$

2) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Solução:

Observe que $f(x) = 0$ satisfaz $f(x+y) = f(x)f(y)$

$$\text{Fazendo } x = y \rightarrow x/2 \text{ então } f(x) = f[(x/2)]^2 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

Para $f(x) > 0$, aplicando logaritmo na base a ($a > 0, a \neq 1$) nos dois lados da igualdade temos que:

$$\log_a f(x+y) = \log_a [f(x)f(y)] \Rightarrow \log_a f(x+y) = \log_a f(x) + \log_a f(y)$$

$$\text{Fazendo } \log_a f(x) = g(x) \Rightarrow g(x+y) = g(x) + g(y) \Rightarrow g(x) = g(1).x \Rightarrow$$

$$\log_a f(x) = kx \Rightarrow f(x) = a^{kx}$$

3) (Espanha-2000) Demonstre que não existe nenhuma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que cumpra: $f(f(n)) = n + 1$.

Solução:

$$f(f(n)) = n + 1 \Rightarrow f(f(f(n))) = f(n + 1) = f(n) + 1.$$

$$\text{Assim, temos que } f(n) = n - 1 + f(1)$$

$$\text{Ou seja, } f(f(n)) = [n - 1 + f(1)] - 1 + f(1) \Rightarrow f(f(n)) = n - 2 + 2f(1) \Rightarrow$$

$$n + 1 = n - 2 + 2f(1) \Rightarrow f(1) = 3/2 \text{ absurdo!!!}$$

4) (Irlanda-95) Determine, com prova, todas as funções reais $f(x)$ satisfazendo a equação

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$$

para todos os números reais x, y .

Solução:

$$\text{I) Fazendo } y = -x \text{ temos: } xf(x) + xf(-x) = 2xf(0) \Rightarrow$$

$$f(x) + f(-x) = 2f(0)$$

$$\text{II) Fazendo } y = 1 \text{ temos: } xf(x) - f(1) = (x - 1)f(x + 1)$$

$$\text{III) Fazendo } x = x + 1 \text{ e } y = -1 \text{ temos:}$$

$$(x + 1)f(x + 1) + f(-1) = (x + 2)f(x)$$

Podemos montar o seguinte sistema:

$$xf(x) - (x - 1)f(x + 1) = f(1) \quad x(x + 1)$$

$$(x + 2)f(x) - (x + 1)f(x + 1) = f(-1) \quad x - (x - 1)$$

$$\text{Então: } x(x + 1)f(x) - (x + 1)(x - 1)f(x + 1) = (x + 1)f(1) \Rightarrow$$

$$- (x - 1)(x + 2)f(x) - (x + 1)(x - 1)f(x + 1) = - (x - 1)f(-1)$$

Somando temos que:

$$f(x)[x^2 + x - x^2 - x + 2] = x[f(1) - f(-1)] + f(1) + f(-1) \Rightarrow$$

$$f(x) = x[f(1) - f(-1)]/2 + f(0)$$

5) (Grécia-97) Seja a função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i) f cresce em $\{0, +\infty\}$.

ii) $f(x) > -1/x$ para todo $x > 0$.

iii) $f(x).f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$ para todo $x > 0$

Encontrar $f(1)$.

Solução:

$$\text{Façamos } f(1) = t. \text{ Fazendo } x = 1 \Rightarrow t.f(t + 1) = 1 \Rightarrow f(t + 1) = \frac{1}{t}$$

$$\text{Aplicando } x = t + 1 \Rightarrow f(t + 1).f\left[f(t + 1) + \frac{1}{t + 1}\right] = 1 \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1}\right) = t = f(1).$$

Como $f(x)$ é crescente em $\{0, +\infty\} \Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} = 1 \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Se $t > 0$ temos que $1 < t = f(1) < f(1+t) = 1/t < 1$.

Assim, temos que $f(1) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

6) (Nova Zelândia-98) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que: $f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$ para todos os números reais x, y .

Solução:

Substituindo $x = 0$ $b = f(0) \Rightarrow f(f(y)) = b^2 + y \Rightarrow f(x)$ é injetora, ou seja, existe um número c tal que $f(c) = 0$

Aplicando $x = c \Rightarrow f(f(y)) = y$. Aplicando $y = 0 \Rightarrow f(xf(x)) = f^2(x)$ (1)

Aplicando $x = f(y)$ em (1) $\Rightarrow f[f(y)f(f(y))] = [f(f(y))]^2 \Rightarrow f(yf(y)) = y^2$ (2)

Comparando (1) e (2) temos que $f(x)^2 = x^2 \Rightarrow f(x) = \pm x$

7) (Polônia-93) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

$f(-x) = -f(x)$, $f(x+1) = f(x) + 1$ para $x \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ para $x \neq 0$.

Solução:

Os valores (i), (ii) e (iii) acima de cada sinal de igualdade (=) indica a propriedade usada nesta passagem.

I) Aplicando $x = 0$ em (i) $\Rightarrow f(0) = 0$

II) Aplicando $\frac{x+1}{x}$ em (ii) temos:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) \stackrel{(ii)}{=} f\left(1 + \frac{1}{x}\right) \stackrel{(iii)}{=} f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = \frac{f(x)}{x^2} + 1$$

III) Podemos desenvolver a igualdade acima de outra forma:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = f\left(\left[\frac{x}{x+1}\right]^{-1}\right) \stackrel{(iii)}{=} \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 f\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \stackrel{(ii)}{=}$$

$$= \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \left[f\left(\frac{-1}{x+1}\right) + 1\right] \stackrel{(i)}{=} \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \left[-f\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1\right] \stackrel{(iii)}{=}$$

$$= \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \left[\frac{-f(x+1)}{(x+1)^2} + 1\right] \stackrel{(ii)}{=} \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \left[1 - \frac{f(x)+1}{(x+1)^2}\right]$$

Igualando as expressões finais encontradas nos itens II e III temos:

$$\frac{f(x)}{x^2} + 1 = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - \frac{f(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(x) + x^2 = x^2 + 2x + 1 - f(x) - 1 \Rightarrow$$

$$2f(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x$$

8) (Croácia-2001) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem à equação: $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$

Solução:

Seja $g(x) = \frac{x-3}{x+1}$, onde $x \neq -1$. Calculando $g^{-1}(x)$ obtemos $g^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-x}$,

$$x \neq 1. \text{ Assim: } g(g(x)) = \frac{\frac{x-3}{x+1} - 3}{\frac{x-3}{x+1} + 1} = \frac{x-3-3x-3}{x-3+x+1} = \frac{x+3}{1-x} = g^{-1}(x).$$

Analogamente: $g^{-1}(g^{-1}(x)) = g(x)$.

Pelo enunciado temos que $f(g(x)) + f(g^{-1}(x)) = x$ (1)

Aplicando $x \rightarrow g(x) \Rightarrow f(g(g(x))) + f(g^{-1}(g(x))) = g(x) \Rightarrow$

$$f(g^{-1}(x)) + f(x) = g(x) \quad (2)$$

Aplicando $x \rightarrow g^{-1}(x) \Rightarrow f(g(g^{-1}(x))) + f(g^{-1}(g^{-1}(x))) = g^{-1}(x) \Rightarrow$

$$f(x) + f(g(x)) = g^{-1}(x) \quad (3)$$

Fazendo (2) + (3) - (1): $2f(x) = g(x) + g^{-1}(x) - x \Rightarrow$

$$2f(x) = \frac{x-3}{x+1} + \frac{x+3}{1-x} - x = \frac{(1-x)(x-3) + (x+3)(x+1) - x(1-x^2)}{1-x^2} \Rightarrow$$

$$2f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3 + x^2 + 4x + 3 - x + x^3}{1-x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 + 7x}{1-x^2}$$

Finalmente, aplicando $f(x) = \frac{x^3 + 7x}{1-x^2}$ em $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$ notamos

que esta função satisfaz o enunciado.

9) (Iberoamericana-93) Seja $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. Ache todas as funções $f: N^* \rightarrow N^*$ tais que:

i) se $x < y$, então $f(x) < f(y)$.

ii) $f(y \cdot f(x)) = x^2 \cdot f(xy)$, para todos os $x, y \in N^*$.

Solução:

Aplicando $x = y$ em ii), temos que: $f(x \cdot f(x)) = x^2 \cdot f(x^2)$ (1)

Aplicando $y = 1$ em ii), temos que: $f(f(x)) = x^2 \cdot f(x) \Rightarrow$

$$f(f(x^2)) = x^4 \cdot f(x^2) \quad (2)$$

Aplicando $y = f(x)$ em ii), temos que:

$$f(f(x) \cdot f(x)) = x^2 \cdot f(x \cdot f(x)) = x^4 \cdot f(x^2) \quad (3)$$

De (2) e (3) temos: $f(f(x^2)) = f([f(x)]^2) \Rightarrow$

$f(x^2) = [f(x)]^2$ pois de i) f é injetora

Se $f(x) < x^2 \Rightarrow f(f(x)) < f(x^2) = [f(x)]^2 \Rightarrow x^2 \cdot f(x) < [f(x)]^2 \Rightarrow x^2 < f(x)$ que é um absurdo

Se $f(x) > x^2 \Rightarrow f(f(x)) > f(x^2) = [f(x)]^2 \Rightarrow x^2 \cdot f(x) > [f(x)]^2 \Rightarrow x^2 > f(x)$ que é um absurdo

Assim, $f(x) = x^2, x \in \mathbb{N}^*$

10) (Torneio das Cidades-96) Prove que não existe nenhuma função $y = f(x)$ tal que $f(f(x)) = x^2 - 1996$ para todo x real.

Solução:

Procuremos inicialmente pontos fixos, ou seja, valores de x de modo que $f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$.

Temos assim a equação $x^2 - 1996 = x$, onde temos duas raízes, digamos x_1 e x_2 , com x_1 diferente de x_2 .

Evidentemente temos que $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 \cdot x_2 = -1996$.

Reparemos que $f(f(f(f(x)))) = f(f(x^2 - 1996)) = (x^2 - 1996)^2 - 1996$

Agora procuremos pontos fixos de $f(f(f(f(x))))$, ou seja, quando que $f(f(f(f(x)))) = x$

Temos a seguinte equação: $(x^2 - 1996)^2 - 1996 = x \Rightarrow$

$x^4 - 4992x^2 - x + 1996^2 - 1996 = 0$,

onde temos quatro soluções: x_1 e x_2 (que já são pontos fixos de $f(x)$) e x_3 e x_4 , distintos entre si e distintos de x_1 e x_2 .

Observemos que $x_3 + x_4 = -1$ e $x_3 \cdot x_4 = -1995 \Rightarrow$

$x_3(-1 - x_3) = -1995 \Rightarrow x_3 = 1995 - x_3^2 \Rightarrow$

$-1 - x_4 = 1995 - x_3^2 \Rightarrow x_4 = x_3^2 - 1996$ e $x_3 = x_4^2 - 1996$

Por outro lado: $f(f(x_3)) = x_3^2 - 1996 = x_4$ e $f(f(x_4)) = x_4^2 - 1996 = x_3$

Sabemos que $f(f(f(x))) = f(x^2 - 1996) = f(x)^2 - 1996$

Assim: $f(f(f(x_3))) = f(x_4) = f(x_3)^2 - 1996$ e

$f(f(f(x_4))) = f(x_3) = f(x_4)^2 - 1996$

Substituindo temos que: $f(x_3) = [f(x_3)^2 - 1996]^2 - 1996 \Rightarrow$

$[f(x_3)]^4 - 4992[f(x_3)]^2 - f(x_3) + 1996^2 - 1996 = 0 \Rightarrow$

$f(x_3) = x_1, x_2, x_3$ ou x_4 .

Se $f(x_3) = x_1$ ou x_2 teríamos que $f(f(x_3)) = f(x_1$ ou $x_2) = x_1$ ou x_2 , que é um absurdo pois $f(f(x_3)) = x_4$

Se $f(x_3) = x_3$ teríamos que x_3 é ponto fixo de $f(x)$, que é falso pois os únicos pontos fixos de $f(x)$ são x_1 e x_2 .

Portanto, $f(x_3) = x_4 \Rightarrow f(f(x_3)) = f(x_4) \Rightarrow x_4 = f(x_4)$ que é uma contradição pois x_4 não é ponto fixo de $f(x)$.

Assim, não existe $f(x)$ que satisfaça $f(f(x)) = x^2 - 1996$.

11) (Canadá Preparação IMO-98) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x + f(y)) = f(x) + y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Solução:

$y = 0 \Rightarrow f(x + f(0)) = f(x)$ (1)

$x = 0 \Rightarrow y \rightarrow x \Rightarrow f(f(x)) = x + f(0)$ (2)

Deste modo $f(f(f(x))) = f(x + f(0)) = f(x)$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ em (1) $\Rightarrow f(f(0)) = f(0)$

Assim, $f(f(f(0))) = f(f(0)) = f(0)$

$x = 0 \Rightarrow y \rightarrow x \Rightarrow f(f(x)) = x$

$y \rightarrow f(y) \Rightarrow f(x + f(f(y))) = f(x + y) = f(x) + f(y)$

Assim, temos que $f(nx) = nf(x)$, por indução.

Deste modo $f(x) = xf(1)$, para todo x real

Como $f(f(1)) = 1$ e $f(nx) = nf(x) \Rightarrow 1 = f(f(1) \cdot 1) = f(1)f(1) = f^2(1) \Rightarrow$

$f(1) = \pm 1$

Assim, temos que $f(x) = x$ e $f(x) = -x$

12) (IMO-2003 Shortlist) Determine todas as funções $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfazem as seguintes condições:

(i) $f(xyz) + f(x) + f(y) + f(z) = f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx})$

(ii) $f(x) < f(y)$ para todo $1 \leq x < y$.

Solução:

Fazendo $x = y = z = 1$: $4f(1) = f^3(1) \Rightarrow f^2(1) = 4 \Rightarrow f(1) = 2$

Fazendo $x = ts, y = t/s, z = s/t$: $f(t)f(s) = f(ts) + f(t/s)$ (1)

Fazendo $s = 1$ em (1): $f(t) = f(1/t)$ (2)

De (2) conclui-se que $f(t) \geq f(1) = 2$ (3)

De (3) segue que existe uma função $g(t) \geq 1$ tal que $f(t) = g(t) + \frac{1}{g(t)}$ (4)

Fazendo $s = t$ em (1): $[f(t)]^2 = f(t^2) + 2 \Rightarrow$

$\left[g(t) + \frac{1}{g(t)}\right]^2 = g(t^2) + \frac{1}{g(t^2)} + 2 \Rightarrow$

$[g(t)]^2 + 2 + \frac{1}{[g(t)]^2} = g(t^2) + \frac{1}{g(t^2)} + 2 \Rightarrow g(t^2) = [g(t)]^2$

Fazendo $s = t^2$ em (1) tem-se que $g(t^3) = [g(t)]^3$

Fazendo $s = t^3$ em (1) tem-se que $g(t^4) = [g(t)]^4$

Por indução, conclui-se que para $n \in \mathbb{N}$ tem-se $g(t^n) = [g(t)]^n \Rightarrow$

$g(t) = [g(t^n)]^{1/n}$ (5)

Fazendo $t \rightarrow t^{m/n}$ em (5): $g(t^{m/n}) = [g(t^m)]^{1/n} = [g(t)]^{m/n}$

Assim, para r racional tem-se que $g(t^r) = [g(t)]^r$.

Como o conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}^+$ conclui-se que $g(t^r) = [g(t)]^r$ para todos t e r reais.

Fazendo $t \rightarrow t^r$ em (4): $f(t^r) = g(t^r) + \frac{1}{g(t^r)} \Rightarrow f(t^r) = g(t)^r + \frac{1}{g(t)^r}$

Perceba que a função exponencial satisfaz $g(t^r) = g(t)^r$

Assim, se $k \in \mathbb{R}$ é tal que $g(t) = t^k$ então $f(t^r) = t^{kr} + \frac{1}{t^{kr}}$

Fazendo $t^r = x$ tem-se que $f(x) = x^k + \frac{1}{x^k}$

2.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) (África do Sul-94) Uma função f definida no conjunto dos inteiros satisfaz $f(x) + f(x+3) = x^2$ para todo inteiro x . Se $f(19) = 94$, determine $f(94)$.

2) Determine todas as funções $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(xy) = f(x) + f(y)$.

3) Determine todas as funções $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(xy) = f(x)f(y)$.

4) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

5) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:
 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$.

6) Determine todas as funções $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

7) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:
 $f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)]$.

8) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que:
 $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$.

9) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:
 $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$.

10) (Argentina-93) Determinar todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que verificam:
 $f(x-f(y)) = 1-x-y$.

11) (Pará-2002) Seja $f(n)$ uma função definida nos números inteiros positivos. Sabe-se que:

- i) $f(f(n)) = 4n + 9$ para todo inteiro positivo n ;
- ii) $f(2^k) = 2^{k+1} + 3$ para todo inteiro não negativo k .

- a) Determine o valor de $f(25)$;
- b) Determine o valor de $f(1789)$.

12) (Itália-97) Sendo p e q dois inteiros positivos e se f é uma função definida nos números positivos que assume somente valores positivos e tal que $f(xf(y)) = (x^p).(y^q)$. Prove que $q = p^2$.

13) (Espanha-98) Determinar todas as funções estritamente crescentes e tais que: $f(n + f(n)) = 2f(n)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

14) (Noruega-94) Prove que não existe nenhuma função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ (ambos, argumentos e resultados, são inteiros) tal que $f(f(x)) = x + 1$ e $f(x+y) = f(x) + y$, para todo x e $y \in \mathbb{Z}$.

15) (Nórdica-98) Determine todas as funções dos números racionais para os números racionais satisfazendo $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ para todos racionais x e y .

16) (Iberoamericana-85) A cada inteiro positivo n chama-se um inteiro não negativo $f(n)$ de tal maneira que se satisfaçam as seguintes condições:

- (i) $f(rs) = f(r) + f(s)$
- (ii) $f(n) = 0$, sempre que o dígito das unidades de n seja 3.
- (iii) $f(10)$ é zero.

Calcule $f(1985)$. Justifique sua resposta.

17) (Cone Sul-98) Determine todas as funções f tais que:
 $f(x^2) - f(y^2) + 2x + 1 = f(x+y).f(x-y)$
quaisquer que sejam os números reais x, y .

18) (Hong Kong-97) Seja f uma função tal que $f(x+y^2) = f(x) + 2(f(y))^2$ e $f(1) \neq 0$. Determine o valor de $f(1996)$.

19) (Irlanda-96) Seja K o conjunto de todos os números reais x com $0 \leq x \leq 1$. Seja f uma função de K para o conjunto de todos os números reais $\mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- (i) $f(1) = 1$
 - (ii) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in K$
 - (iii) se x, y e $x+y$ estão todos em K , então $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.
- Prove que $f(x) \leq 2x$ para todo $x \in K$.

20) (Romênia-81) Determine se existe uma função injetora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade: $f(x^2) - f^2(x) \geq 1/4$.

21) (Leningrado-88) As funções $f(x)$ e $g(x)$ são definidas na reta real tal que elas satisfazem as seguintes condições: para todos números reais x e y , $f(x + g(y)) = 2x + y + 5$. Determine uma expressão para a função $g(x + f(y))$.

22) (Hong Kong-88) Se $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ para todos os reais x e y , determine $f(x)$.

23) (Hong Kong-98) Seja f uma função com as seguintes propriedades:

- (i) $f(n)$ é definida para todo inteiro positivo n ;
 - (ii) $f(n)$ é um inteiro positivo;
 - (iii) $f(f(m) + f(n)) = m + n$ para todo m e n .
- Determine $f(1997)$.

24) (International Mathematical Talent Search) Prove que se $f(x)$ é uma função real não constante tal que para todo x real, $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{3}f(x)$, então $f(x)$ é periódica. Qual é o menor valor de p , $p > 0$, tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo x ?

25) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $x + f(x) = f(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine todas as soluções da equação $f(f(x)) = 0$.

26) (Grécia-2000) Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(1) = 3$ e $f(m+n) + f(m-n) - m + n - 1 = \frac{f(2m) + f(2n)}{2}$ para todos os inteiros não negativos m e n ($m \geq n$). Determine a expressão de $f(m)$.

27) (IMO-1979 Shortlist) Dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se para todos os números reais x e y a igualdade $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$ é válida, prove que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para os números reais x e y .

28) (IMO-1992 Shortlist) Determine todas as funções $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tais que $f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x$.

29) (Índia Preparação IMO-2003) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, nós temos:

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy).$$

30) (Ucrânia-2006) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y.$$

31) (Iberoamericana-93) Seja $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. Ache todas as funções $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ tais que:

- i) se $x < y$, então $f(x) < f(y)$.
- ii) $f(y \cdot f(x)) = x^2 \cdot f(xy)$, para todos os $x, y \in \mathbb{N}^*$.

32) (Iberoamericana-87) Encontrar as funções $f(x)$ tais que:

$$[f(x)]^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x \quad \text{para } x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1.$$

33) (Iberoamericana-88 banco) Determine as funções crescentes f , definidas nos naturais tais que:

$$f(0) = 2 \text{ e } [f(n+1) - 1]^2 + [f(n) - 1]^2 = 2f(n) \cdot f(n+1) + 4.$$

34) (Bielo Rússia-95) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

35) (IMO-83) Determine todas as funções $f(x)$ definidas no conjunto dos reais positivos que assumem valores reais positivos e satisfazem:

- i) $f(xf(y)) = yf(x)$ para todo x, y ;
- ii) $f(x)$ tende para 0 quando x tende para o infinito.

36) (IMO-86) Determine todas as funções $f(x)$ definidas no conjunto dos reais não negativos e que assumem valores reais não negativos tais que:

- i) $f(2) = 0$,
- ii) $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$, e
- iii) $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$ para todo x, y .

37) (IMO-96 Shortlist) Seja f uma função com domínio nos números reais $\mathbb{R}$ e imagem em $\mathbb{R}$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, nós temos $|f(x)| \leq 1$ e $f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$. Prove que f é uma função periódica, isto é, existe um número real não nulo c , tal que $f(x+c) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

38) (IMO-2010 Shortlist) Determine todas as funções $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ tais que para todos os $x, y \in \mathbb{Q}^+$: $f(f(x)^2y) = x^3f(xy)$.

39) (IMO-2008 Shortlist) Determine todas as funções $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tais que $\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$ para todos os números z, x, y, z satisfazendo $wx = yz$.

40) (Áustria-97) Prove que não existe função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(x + f(y)) = f(x) - y$ para todos os inteiros x, y .

41) (Romênia-97) Determine todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tais que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$.

42) (África do Sul-97) Determine todas as funções $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ que satisfazem $f(m + f(n)) = f(m) + n$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$.

43) (IMO-2005 Shortlist) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1$ para todos os números reais x e y .

44) (IMO-2007 Shortlist) Determine todas as funções $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazendo $f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$ para todos os números reais positivos x e y .

45) (Japão-2011) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - 2x^2f(y) + f(y^2)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

46) (Inglaterra-92) Seja f uma função com domínio nos inteiros positivos e imagem nos inteiros positivos. Suponha que: $f(n + 1) > f(n)$ e $f(f(n)) = 3n$ para todos os inteiros positivos n . Determine $f(1992)$.

2.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x + y) - f(x - y) = 2f(y)$.

2) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f^2(x) = f(x + y)f(x - y)$.

3) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x + y)f(x - y) = [f(x)f(y)]^2.$$

4) Determine todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$

5) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f^2(x) = 1 + xf(x + 1)$.

6) Seja f uma função com as seguintes propriedades:

- (1) $f(n)$ é definida para todo inteiro positivo n ;
- (2) $f(n)$ é um inteiro;

- (3) $f(2) = 2$;
 - (4) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ para todo m e n ;
 - (5) $f(m) > f(n)$ quando $m > n$.
- Prove que $f(n) = n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

7) (Irlanda-99) Uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (onde $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos inteiros positivos) satisfaz:

- (1) $f(ab) = f(a)f(b)$ quando o maior divisor comum entre a e b é 1.
 - (2) $f(p + q) = f(p) + f(q)$ para todos os números primos p e q .
- Prove que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ e $f(1999) = 1999$.

8) (Áustria-94) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz para todo $x \in \mathbb{R}$ as condições $f(x + 19) \leq f(x) + 19$ e $f(x + 94) \geq f(x) + 94$. Prove que $f(x + 1) = f(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

9) (Espanha-2000) Consideram-se as funções reais de variável real $f(x)$ da forma: $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais. Para quais valores de a e b verifica-se $f^{2000}(x) = x$ para todo número real x .
 [Nota: Define-se $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$, e em geral, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(f(\dots f(x)\dots))$ n vezes]

10) (Suécia-93) Sejam a e b números reais e seja $f(x) = 1/(ax + b)$. Dado que existem três números reais distintos x_1, x_2, x_3 tais que $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ e $f(x_3) = x_1$, prove que $a = -b^2$.

11) (África do Sul-94) Determine todas as funções f tais que $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ para todos os valores reais de x e y .

12) (Hong Kong-96) A função f satisfaz $f(x) + f(y) = f(x + y) - xy - 1$, para todos os reais x, y . Se $f(1) = 1$, determine todos os inteiros negativos tais que $f(n) = n$.

13) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que $f(x)f(f(x)) = 1$, para todo x . Se $f(1000) = 999$, calcule $f(500)$.

14) (Iberoamericana-90) Seja f uma função, definida no conjunto dos inteiros maiores ou iguais que zero, que verifica as duas condições seguintes:

- (I) Se $n = 2^j - 1$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, então $f(n) = 0$;
 - (II) Se $n \neq 2^j - 1$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, então $f(n + 1) = f(n) - 1$.
- a) Demonstrar que para todo inteiro n , maior ou igual que zero, existe um inteiro k , maior que zero, tal que: $f(n) + n = 2^k - 1$
- b) Calcular $f(2^{1990})$.

15) Suponha que f satisfaça a equação: $2f(x) + 3f\left(\frac{2x+29}{x-2}\right) = 100x + 80$. Calcule $f(3)$.

16) (Putnam-59) Determine todas as funções f com domínio e imagem nos números complexos tais que:
 $f(z) + zf(1-z) = 1 + z$ para todo z .

17) (Itália-97) Seja f uma função real de variável real que verifica as condições:
 (i) $f(10+x) = f(10-x)$
 (ii) $f(20+x) = -f(20-x)$
 para todos os valores reais de x . Demonstre que f é uma função ímpar e periódica.

18) (IMO-68) Seja f uma função real definida para todos os números reais, tais que para todo $a > 0$ tem-se

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$$

Prove que f é periódica, e mostre um exemplo de tal função para $a = 1$.

19) (Argentina-2005) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$.

20) (Itália Seletiva IMO-99) a) Determine todas as funções estritamente monótonas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais $f(x + f(y)) = f(x) + y$, para todos os reais x, y .
 b) Se $n > 1$ é um inteiro, prove que não existe função estritamente monótona $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x + f(y)) = f(x) + y^n$ para todo real x, y .

21) (Índia Regional-2006) Seja X o conjunto de todos os inteiros positivos maiores ou iguais a 8 e seja $f: X \rightarrow X$ uma função tal que $f(x+y) = f(xy)$ para todo $x \geq 4, y \geq 4$. Se $f(8) = 9$, determine $f(9)$.

22) (Índia Seletiva IMO-2010) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x+y) + xy = f(x)f(y)$ para todos os reais x, y .

23) (Macedônia-2006) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que para todos x, y, z , $f(x+y^2+z) = f(f(x)) + yf(y) + f(z)$.

24) (Quirguistão-2009) Para a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x^2 + x + 3) + 2f(x^2 - 3x + 5) = 6x^2 - 10x + 17$. Calcule o valor de $f(2009)$.

25) (Bulgária-98) Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Prove que não existe nenhuma função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$(f(x))^2 \geq f(x+y)f(x+y)$$

para quaisquer x e y reais.

26) (Noruega-96) Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (isto é, ambos x e $f(x)$ números naturais) tal que $f(f(1995)) = 95$, $f(xy) = f(x)f(y)$, e $f(x) \leq x$. Calcule todos os valores possíveis de $f(1995)$.

27) (OBM-98) Determine todas as funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que satisfazem $f(2f(x)) = x + 1998$ para todo $x \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

28) (Hong Kong-99) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que
 $f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y)$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

29) (OBM-2001) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que
 $f(x) = f(-x)$ e $f(x+y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115$
 para todos os reais x e y .

30) (OBM-2003) Seja $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, uma função tal que

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

quaisquer que sejam os reais não nulos x e y .

(a) Calcule $f(1)$

(b) Encontre uma fórmula para $f(x)$

31) (OBM-2011) Seja f uma função dos reais não nulos nos reais não nulos tal que

• $(f(x) + f(y) + f(z))^2 = (f(x))^2 + (f(y))^2 + (f(z))^2$ para todos x, y, z reais não nulos tais que $x + y + z = 0$;

• $f(-x) = -f(x)$ para todo x real não nulo;

• $f(2011) = 1$.

Encontre o inteiro mais próximo de $f(33)$.

DESIGUALDADES

3.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Desde o início das competições de olimpíadas de matemática esta parte da álgebra sempre foi cobrada com certa regularidade, principalmente nas provas de olimpíadas nacionais e internacionais. Inicialmente, cobrada apenas nas provas de ensino médio, mais recentemente algumas olimpíadas internacionais de ensino fundamental têm vindo com questões de desigualdades.

As questões de desigualdades possuem um certo padrão, onde deve-se demonstrar que uma expressão algébrica é sempre maior ou igual, menor ou igual, maior ou menor que outra expressão algébrica ou número.

3.2. RESUMO TEÓRICO

Desigualdade do Rearranjo: Sejam $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, onde $a_i \in \mathbb{R}$, e seja $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$, onde $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ é uma reordenação de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Então:

$$a_1a_n + a_2a_{n-1} + \dots + a_na_1 \leq S \leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

Desigualdade modular: Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais. Então:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Desigualdade de Jensen: Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais então:

- 1) Se f é convexa, então $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$
- 2) Se f é côncava, então $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$

Desigualdade Entre as Médias Aritmética e Geométrica: Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$. Então:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a_1, a_2, \dots, a_n$ forem todos iguais.

Desigualdade de Cauchy: Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ reais dados, não todos nulos ($n > 1$). Então:

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$$

Além disso, teremos a igualdade se e só se os a_i e os b_i forem proporcionais, isto é, se e só se existir um real positivo λ tal que $b_i = \lambda a_i$ para todo i .

Desigualdade de Chebychev: Sejam $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ reais, com $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Então

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + \dots + b_n}{n}\right) \leq \frac{a_1b_1 + \dots + a_nb_n}{n},$$

com igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ ou $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Desigualdade entre as Médias de Potência: Sejam $x < y$ reais positivos. Então, para todos $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais positivos, vale:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1^y + a_2^y + \dots + a_n^y}{n}},$$

com igualdade se e só se $a_1, a_2, \dots, a_n$ forem todos iguais.

Desigualdade de Minkowsky: Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ reais positivos e p um real maior que 1. Então:

$$\sqrt[p]{(a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p} \leq \sqrt[p]{a_1^p + \dots + a_n^p} + \sqrt[p]{b_1^p + \dots + b_n^p}$$

3.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) (Canadá-71) Sejam x e y números reais tais que $x + y = 1$. Mostre que:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

Solução:

Desenvolvendo: $S = 1 + 1/x + 1/y + 1/xy = 1 + (x + y)/xy + 1/xy = 1 + 2/xy$

Note que: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \Rightarrow 4xy \leq (x + y)^2 \Rightarrow$

$$xy \leq 1/4 \Rightarrow 1/xy \geq 4$$

$$\text{Então } S = 1 + 2/xy \geq 1 + 8 = 9 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

2) (Bélgica-86) Prove que, para todo número natural n , nós temos

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Solução:

Sabe-se que $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{1+2+3+\dots+n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \Rightarrow \frac{n+1}{2} \geq \sqrt[n]{n!} \Rightarrow n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

3) (Rússia-62) São dados quatro números positivos a, b, c, d , e sabe-se, que $abcd = 1$. Prove que:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + dc \geq 10.$$

Solução:

Pela desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica:

$$I) a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt[4]{(abcd)^2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$$

$$II) ab + ac + ad + bc + bd + dc \geq 6\sqrt[6]{(abcd)^3} \Rightarrow$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + dc \geq 6$$

Somando as duas desigualdades:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + dc \geq 10$$

4) (Inglaterra-82) Se $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $n > 2$, prove que

$$n(n+1)^a - n < H_n < n - (n-1)n^b,$$

onde a e b são termos dados em função de n pelas equações

$$an = 1 \text{ e } b(n-1) = -1.$$

Solução:

$$I) n - H_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$n - H_n > (n-1) \left[\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right) \dots \left(\frac{n-1}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n-1}} = (n-1) \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \Rightarrow$$

$$H_n - n < -(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}} \Rightarrow H_n < n - (n-1)n^b \text{ onde } b = -1/(n-1)$$

$$II) n + H_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$n + H_n > n \left[\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{5}{4}\right) \dots \left(\frac{n+1}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} = n(n+1)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow H_n + n > n(n+1)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$H_n > n(n+1)^a - n \text{ onde } a = 1/n$$

5) (APMO-89) Seja $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos, e seja $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Prove que $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \leq 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \dots + \frac{S^n}{n!}$.

Solução:

Pela desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica tem-se

$$\text{que } a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n.$$

$$\text{Fazendo } a_1 = (1+x_1) \quad a_2 = (1+x_2) \quad \dots \quad a_n = (1+x_n):$$

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \leq \left(\frac{1+x_1+1+x_2+\dots+1+x_n}{n} \right)^n = \left(\frac{n+S}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{S}{n} \right)^n$$

A expansão binomial de $(1+S/n)^n$ nos diz que:

$$\left(1 + \frac{S}{n} \right)^n = 1 + n \cdot \frac{S}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{S^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{S^3}{n^3} + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{S^k}{n^k} + \dots + n \cdot \frac{S^{n-1}}{n^{n-1}} + \frac{S^n}{n^n} \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{S}{n} \right)^n = 1 + S + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S^2}{2!} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{S^3}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{S^k}{k!} +$$

$$+ \dots + n \cdot \frac{S^{n-1}}{n^{n-1}} + \frac{S^n}{n^n}$$

Como, para $n \geq 1$, $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \leq 1$ temos que:

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \leq 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \dots + \frac{S^n}{n!}$$

6) (Inglaterra-92) Dados 4 números reais positivos a, b, c e d , prove que

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

Resolução:

I) A desigualdade entre a média harmônica e a média aritmética nos diz que, sendo $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Aplicando esta desigualdade para $1/(a+b)$, $1/(a+c)$, $1/(a+d)$, $1/(b+c)$, $1/(b+d)$ e $1/(c+d)$ temos:

$$\frac{6}{3a+3b+3c+3d} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d}$$

II) Aplicando agora a desigualdade para $1/a$ e $1/b$, $1/a$ e $1/c$, ... temos:

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \frac{2}{a+c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \dots$$

Dividindo por 2 os dois membros das 6 desigualdades obtidas e somando todas, temos:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \dots + \frac{1}{c+d} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

7) (Irlanda-99) Sejam a, b, c e d números reais positivos cuja soma é 1.

Prove que: $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}$, com igualdade se e somente se $a = b = c = d = 1/4$.

Solução:

$$\text{Sejam: } a_1 = \sqrt{a+b} \quad a_2 = \sqrt{b+c} \quad a_3 = \sqrt{c+d} \quad a_4 = \sqrt{d+a}$$

$$b_1 = \frac{a}{\sqrt{a+b}} \quad b_2 = \frac{b}{\sqrt{b+c}} \quad b_3 = \frac{c}{\sqrt{c+d}} \quad b_4 = \frac{d}{\sqrt{d+a}}:$$

Pela Desigualdade de Cauchy para 4 números:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2 \Rightarrow$$

$$[(a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+a)].S \geq (a+b+c+d)^2 \Rightarrow$$

$$2(a+b+c+d).S \geq (a+b+c+d)^2 \Rightarrow S \geq (a+b+c+d)/2 \Rightarrow S \geq 1/2$$

8) (USAMO-74) Prove que se a, b e c são números reais positivos, então:

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}.$$

Solução:

Como $f(x) = \ln x^x$ é uma função convexa, então pela Desigualdade de Jensen: $f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f[(a+b+c)/3] \Rightarrow$

$$\ln a^a + \ln b^b + \ln c^c \geq 3 \ln \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{(a+b+c)/3} \Rightarrow$$

$$\ln a^a b^b c^c \geq \ln \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{a+b+c} \Rightarrow a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{a+b+c}$$

Pela Desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica:

$$(a+b+c)/3 \geq (abc)^{1/3} \Rightarrow a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}$$

9) (USAMO-97) Prove que, para todos números reais positivos a, b, c :

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Solução:

A desigualdade $(a-b)(a^2-b^2) \geq 0$ implica $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$

$$\text{Então } \frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{abc(a+b+c)}.$$

$$\text{Analogamente: } \frac{1}{b^3+c^3+abc} \leq \frac{1}{bc(b+c)+abc} = \frac{a}{abc(a+b+c)} \text{ e}$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{ca(c+a)+abc} = \frac{b}{abc(a+b+c)}.$$

Portanto:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}$$

10) (Vietnã-98) Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) números positivos satisfazendo

$$\frac{1}{x_1+1998} + \frac{1}{x_2+1998} + \dots + \frac{1}{x_n+1998} = \frac{1}{1998}.$$

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq 1998.$$

Solução:

$$\text{Sejam } y_1 = \frac{1998}{x_1+1998}, y_2 = \frac{1998}{x_2+1998}, \dots, y_n = \frac{1998}{x_n+1998}. \text{ Então, para}$$

cada n temos que $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$.

Assim: $1 - y_1 = y_2 + y_3 + \dots + y_n, 1 - y_2 = y_1 + y_3 + \dots + y_n, \dots,$

$$1 - y_n = y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$1 - y_1 \geq (n-1)^{n-1} \sqrt[n-1]{y_2 y_3 \dots y_n} \quad 1 - y_2 \geq (n-1)^{n-1} \sqrt[n-1]{y_1 y_3 \dots y_n} \dots$$

$$1 - y_n \geq (n-1)^{n-1} \sqrt[n-1]{y_1 y_2 \dots y_{n-1}}$$

Multiplicando todas estas desigualdades:

$$(1 - y_1)(1 - y_2) \dots (1 - y_n) \geq (n-1)^{ny_1 y_2 \dots y_n} \Rightarrow$$

$$\frac{1 - y_1}{y_1} \frac{1 - y_2}{y_2} \dots \frac{1 - y_n}{y_n} \geq (n-1)^n$$

$$\text{Entretanto, como } \frac{1 - y_i}{y_i} = \frac{x_i}{1998} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \text{ então:}$$

$$x_1 x_2 \dots x_n \geq 1998^n (n-1)^n \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq 1998.$$

11) (IMO-95) Sejam a, b, c números reais positivos com $abc = 1$. Prove que $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.

Solução:

Sejam $x = (1/a), y = (1/b), z = (1/c)$

Então

$$S = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^3yz}{x+y} + \frac{y^3xz}{x+z} + \frac{z^3xy}{x+y} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

$$\text{Sejam: } a_1 = \sqrt{y+z} \quad a_2 = \sqrt{z+x} \quad a_3 = \sqrt{x+y}$$

$$b_1 = \frac{x}{\sqrt{y+z}} \quad b_2 = \frac{y}{\sqrt{z+x}} \quad b_3 = \frac{z}{\sqrt{x+y}}$$

Pela Desigualdade de Cauchy:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \Rightarrow$$

$$[(y+z) + (z+x) + (x+y)].S \geq (x+y+z)^2 \Rightarrow$$

$$2(x+y+z).S \geq (x+y+z)^2 \Rightarrow S \geq (x+y+z)/2.$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$S \geq \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

A igualdade ocorre se e somente se $x = y = z = 1$, que é equivalente a $a = b = c = 1$.

3.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) Sejam a, b e c números reais positivos. Prove que:

$$(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc.$$

2) Se a, b e c são positivos e $a+b+c=1$, então prove que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

3) Se $a > 0, b > 0$, prove que $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

4) Se $a > 0, b > 0, c > 0$, Prove que $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$.

5) Demonstrar que se x, y, z são números reais positivos, então:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

6) (OBM-2001) Prove que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ para quaisquer números reais positivos a, b e c .

7) (Teste Seleção Cone Sul-94) Sejam a, b, c, d números reais positivos.

$$\text{Prove que } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

8) (Teste Seleção Cone Sul-2000) Prove que

$$a^3 + b^3 + c^3 + 15abc \leq 2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2),$$

para todos os a, b, c reais não negativos.

9) (Irlanda-98) Prove que se a, b, c são números reais positivos, então:

$$(i) \quad \frac{9}{a+b+c} \leq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \quad e$$

$$(ii) \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

10) (APMO-91) Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ números reais tais que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Mostre que:

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2}.$$

11) (Rioplatense-2003) Sejam x, y, z números reais positivos tais que x^2

$$+ y^2 + z^2 = 1. \text{ Prove que } x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}.$$

12) (IMO-87) Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais satisfazendo $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Prove que para todo inteiro $k \geq 2$ existem inteiros $a_1, a_2, \dots, a_n$, não todos nulos, tais que $|a_i| \leq k-1$ para todo i , e:

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

13) (Irã-98) Seja $x, y, z > 1$ e $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Prove que:

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

14) (Hungria-96) Sejam a e b números reais positivos com $a+b=1$.

$$\text{Prove que } \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}.$$

15) (Torneio das Cidades-97) Os números positivos a, b, c são tais que $abc = 1$. Demonstrar a desigualdade:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1.$$

16) (Asian Pacific-98) Sejam a, b, c números reais. Prove que:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

17) (Noruega-99) Prove que para todos os números reais a, b, c, d e e , a inequação $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ é válida:

18) (Áustria-Polônia-98) Sejam x_1, x_2, y_1, y_2 números reais tais que $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Prove que $(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2 \geq (x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1)$

19) (Bielo Rússia-99) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Prove que $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$.

20) Prove que $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$, para $a, b, c > 0$.

21) Sendo a, b, c reais positivos tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, mostre que:

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8.$$

22) (Romênia-99) Mostre que para todos os números reais $x_1, x_2, \dots, x_n$ tais que $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, a seguinte desigualdade é válida:

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1.$$

23) (Rússia-99) O produto dos números reais positivos x, y, z vale 1. Mostre que se $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x+y+z$ então $\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geq x^k + y^k + z^k$, para todos os inteiros positivos k .

24) (Turquia-99) Prove que $(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc$ para todos os números reais $0 \leq a \leq b \leq c$.

25) (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-99) Para os números reais arbitrários a, b e c , demonstre a desigualdade $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$.

26) (Bielo Rússia-2000) Prove que $\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$ para todos os reais positivos a, b, c, x, y, z .

27) (Inglaterra-2000) Sejam x, y, z números reais positivos tais que $xyz = 32$. Determine o valor mínimo de $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$.

28) (Alemanha-2004) Prove que, para todos os números reais positivos a, b, c, d ,

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

29) (Estônia-97) Prove que, para todos os números reais x e y a seguinte desigualdade é válida:

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}.$$

30) (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-2005) Sejam a, b, c números positivos satisfazendo $abc = 1$. Prove que:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

31) (Rússia-91) Para todos os números reais não negativos x, y, z prove que:

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

32) Se a, b, c são números reais positivos, prove que:

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

33) Sejam a, b, c números positivos com $abc = 1$. Prove que:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

34) (Romênia-2007) Para os números reais não negativos x, y, z , prove que:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4} |(x-y)(y-z)(z-x)|$$

35) (México-2007) Se a, b, c são números reais positivos que satisfazem $a + b + c = 1$, prove que $\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq 2$.

36) (Kazaquistão-2008) Sejam x, y, z números reais positivos tais que $xyz = 1$. Prove que $\frac{1}{yz+z} + \frac{1}{zx+x} + \frac{1}{xy+y} \geq \frac{3}{2}$.

37) (Polônia-2006) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $ab + bc + ca = abc$. Prove que $\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1$.

38) (Balcânica-2001) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a + b + c \geq abc$. Prove que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$.

39) (Rioplatense-2002) Sejam a, b e c números reais estritamente positivos. Mostre que $\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1$.

40) (Rússia-2003) Sejam a, b, c números reais positivos com $a + b + c = 1$. Prove que $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}$.

41) (Moldávia-2004) Prove que para todos os números reais $a, b, c \geq 0$, a seguinte desigualdade vale $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$.

42) (Ucrânia-2004) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $abc \geq 1$. Prove que $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ca$.

43) (Lituânia-2006) Sejam a, b, c números reais positivos. Prove que:

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right).$$

44) (Bulgária-2007) Se a, b, c são números reais positivos, prove que:

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2+1}} + \frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2+1}} + \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2+1}} \geq a + b + c + 3.$$

45) (Báltica-2008) Se os números reais positivos a, b, c satisfazem $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, prove que $\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}$.

46) (IMO-2008 Shortlist) Se x, y e z são números reais, todos distintos de 1, tais que $xyz = 1$, então prove que $\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$.

47) (Romênia-2008) Se a, b, c são números reais positivos com $ab + bc + ca = 3$, prove que $\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}$.

48) (IMO-78) $\{a_k\}$ é uma seqüência de inteiros positivos distintos. Prove que para todos os inteiros positivos n , $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

49) (IMO-90 Shortlist) Sejam a, b, c, d números reais não negativos tais que $ab + bc + cd + da = 1$. Mostre que:

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

50) (IMO-93 Shortlist) Prove que para todos os números reais positivos a, b, c, d temos $\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}$.

51) (IMO-96 Shortlist) Sejam a, b e c números reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que $\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$.
(Quando vale a igualdade?)

52) (IMO-2000) Sejam a, b, c números reais tais $abc = 1$. Prove que:

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

53) (IMO-2010 Shortlist) Os números reais a, b, c, d satisfazem as relações $a + b + c + d = 6$ e $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$. Prove que:
 $36 \leq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leq 48$.

3.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) (Pará-2009) Sejam x, y e z números reais tais que $x + y + z = 5$ e $xy + yz + xz = 3$. Determine o mínimo e o máximo valor que alguma destas variáveis pode assumir.

2) Se a, b e c são números reais positivos, prove que:

(i) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(a^3 + b^3 + c^3)$.

(ii) $bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)$

3) Prove que se $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, então:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

4) Suponha que a, b, c são reais positivos. Prove que:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

5) Se $a, b, c \geq 0$, prove que $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$.

6) Se $n = 2, 3, 4, \dots$, prove que $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} > n$.

7) Prove que se $2x + 4y = 1$, então $x^2 + y^2 \geq 1/20$.

8) Prove que se a, b e c são números de mesmo sinal e $a < b < c$, então:

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) < 0$$

9) Se a, b, c são reais positivos, prove que:

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(a^2c + b^2a + c^2b) \geq 9a^2b^2c^2$$

10) Sejam $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ números reais positivos tais que

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1. \text{ Prove que } x_1x_2\dots x_{n+1} \geq n^{n+1}.$$

11) Sendo a, b, c reais positivos tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, mostre que:

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8.$$

12) (Inglaterra-96) Sejam a, b e c números reais positivos. Prove que:

a) $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$;

b) $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3$.

13) (USAMO-78) Dado que a, b, c, d, e são números reais tais que

$$a + b + c + d + e = 8, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Determine o máximo valor de e .

14) (Apics-88) Mostre que $3a^4 - 4a^3b + b^4 \geq 0$, para todos os números reais a, b .

15) (Irlanda-98) Mostre que se x é um número real não nulo, então:

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0.$$

16) (Alemanha-82) Os números reais não negativos $a_1, a_2, \dots, a_n$ satisfazem $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Mostre que a soma

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\dots+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+\dots+a_n} + \dots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}$$

possui um mínimo e calcule-o.

17) (Noruega-95) Seja n um número natural, e sejam $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n > 0$. Prove que

$$\left((x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{x_1 y_1} + \frac{1}{x_2 y_2} + \dots + \frac{1}{x_n y_n} \right) \geq 4n^2$$

18) (OBM-2005) Determine o menor número real C para o qual a desigualdade

$$C(x_1^{2005} + x_2^{2005} + x_3^{2005} + x_4^{2005} + x_5^{2005}) \geq x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 (x_1^{125} + x_2^{125} + x_3^{125} + x_4^{125} + x_5^{125})^{16}$$

é válida para todos os números reais positivos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

19) Sejam a, b e c números reais tais que $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 9$.

Prove que $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \sqrt[3]{3}$.

20) (Irlanda-2008) Suponha que x, y, z são números reais tais que $xyz \geq 1$.

(a) Prove que $27 \leq (1+x+y)^2 + (1+y+z)^2 + (1+z+x)^2$, com igualdade se e somente se $y = z = 1$.

(b) Prove que $(1+x+y)^2 + (1+y+z)^2 + (1+z+x)^2 \leq 3(x+y+z)^2$, com igualdade se e somente se $y = z = 1$.

21) (Irlanda-2008) Para os números reais a, b, c, d tais que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ prove que

$$a^2b^2cd + ab^2c^2d + abc^2d^2 + a^2bcd^2 + a^2bc^2d + ab^2cd^2 \leq 3/32,$$

e determine os casos de igualdade.

22) (Croácia Seletiva IMO-2006) Assuma que a, b, c são números reais para os quais $(a+b)(a+c)(b+c) = 1$. Prove que $ab+bc+ca \leq \frac{3}{4}$.

23) (Croácia-2004) Se a, b, c são números reais positivos, prove a desigualdade $\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$.

24) (Polônia-2006) Os números positivos a, b, c satisfazem a igualdade $ab+bc+ca = 3$. Prove que $a^3+b^3+c^3+6abc \geq 9$.

25) (Balcânica Jr.-2011) Sejam a, b, c números reais tais que $abc = 1$. Prove que:
 $(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1) \geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$

26) (Costa Rica-2009) Sejam x e y números reais positivos tais que $(1+x)(1+y) = 2$. Mostre que $xy + \frac{1}{xy} \geq 6$.

27) (Índia-2007) Se x, y, z são números reais positivos, prove que:
 $(x+y+z)^2(yz+zx+xy)^2 \leq 3(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2)$.

28) Sejam a, b, c números reais não negativos. Prove que:
 $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$.

29) (Indonésia-2010) Sejam a, b, c números reais não negativos e sejam x, y, z números reais positivos tais $a+b+c = x+y+z$. Prove que:

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq a+b+c.$$

30) (Geórgia-2005) Sejam a, b, c números positivos satisfazendo $abc \geq 1$. Prove que $a^3+b^3+c^3 \geq ab+bc+ca$.

31) (Hong Kong-2005) Sejam a, b, d, c números reais positivos tais que $a+b+c+d = 1$. Prove que $6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq (a^2+b^2+c^2+d^2) + \frac{1}{8}$.

32) (Grécia-2011) Sejam a, b, c números reais positivos com soma 6. Determine o valor máximo de:

$$S = \sqrt[3]{a^2+2bc} + \sqrt[3]{b^2+2ca} + \sqrt[3]{c^2+2ab}.$$

33) (Suíça-2010) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ satisfazendo $xyz = 1$. Prove que:

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z.$$

34) (Eslovênia-2010) Sejam x, y, z números reais tais que $0 \leq x, y, z \leq 1$. Prove que $xyz + (1-x)(1-y)(1-z) \leq 1$.

35) (Macedônia-2011) Sejam $a, b, c, d > 0$ e $a+b+c+d = 1$. Prove a desigualdade $\frac{1}{4a+3b+c} + \frac{1}{3a+b+4d} + \frac{1}{a+4c+3d} + \frac{1}{4b+3c+d} \geq 2$.

36) (Macedônia-2008) Números positivos a, b, c tais que $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$. Prove a desigualdade $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$.

37) (Japão-2006) Para todos os números reais positivos $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$, determine o valor máximo do número real A tal que se

$$M = (x_1^3+x_2^3+x_3^3+1)(y_1^3+y_2^3+y_3^3+1)(z_1^3+z_2^3+z_3^3+1) \text{ e}$$

$$N = A(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3),$$

então $M \geq N$ sempre ocorre.

38) (Macedônia-2013) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a^4+b^4+c^4 = 3$. Prove que:

$$\frac{9}{a^2+b^4+c^6} + \frac{9}{a^4+b^6+c^2} + \frac{9}{a^6+b^2+c^4} \leq a^6+b^6+c^6+6$$

39) (Suíça-2011) Sejam a, b, c e d números reais positivos satisfazendo $a+b+c+d = 1$. Mostre que: $\frac{2}{(a+b)(c+d)} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}}$

40) (Báltica-2011) Sejam a, b, c, d reais não negativos tais que $a+b+c+d = 4$. Prove que $\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}$.

POLINÔMIOS

4.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Tópico relativamente pouco cobrado, principalmente por ser ensinado, em geral, na última série do ensino médio. Algumas questões vêm surgindo em competições nacionais e internacionais de ensino médio, mas em número reduzido. Não existe um tipo específico de questão. Os conteúdos mais cobrados são relações entre as raízes de um polinômio, sinal de determinada raiz e determinação de um polinômio que satisfaz alguma equação polinomial.

4.2. RESUMO TEÓRICO

Raiz de um Polinômio: Se $p(a) = 0$, o número a é denominado raiz ou zero de $p(x)$.

Grau de um polinômio: Grau de um polinômio $p(x)$ é o maior expoente de x entre todos os termos não nulos deste polinômio. Ou seja, se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$, então $\partial p = n$.

Grau do produto de dois polinômios: Se p_1 e p_2 são polinômios não nulos, então o grau de $p_1 \cdot p_2$ é igual à soma dos graus de p_1 e p_2 . Ou seja, $\partial(p_1 \cdot p_2) = \partial p_1 + \partial p_2$.

Polinômio Identicamente Nulo: Define-se polinômio identicamente nulo como sendo a função polinomial $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo x complexo temos $p(x) = 0$.

Polinômios Idênticos: Dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são considerados iguais se e somente se os coeficientes relativos aos mesmos expoentes são iguais.

Polinômios Equivalentes: Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são considerados equivalentes quando $P(x) = k \cdot Q(x)$, com $k \neq 0$, qualquer que seja x complexo.

Divisão de polinômios: Dados dois polinômios $p(x)$ e $h(x) \neq 0$, define-se a divisão de $p(x)$ por $h(x)$ da seguinte maneira: dividir $p(x)$ por $h(x)$ é equivalente a determinar dois outros polinômios $q(x)$ e $r(x)$ de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

$$I) p(x) = q(x) \cdot h(x) + r(x);$$

$$II) \partial[r(x)] < \partial[h(x)].$$

Teorema do Resto: O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de p em a .

Teorema de D'Alembert: Um polinômio p é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de p .

Teorema Fundamental da Álgebra:

"Toda equação algébrica $P(x) = 0$, de grau n ($n \geq 1$), tem pelo menos uma raiz complexa"

Teorema da Decomposição:

Todo polinômio $P(x)$ de grau n ($n \geq 1$) $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ($a_n \neq 0$) pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, ou seja, $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)$.

Multiplicidade: Dizemos que r é raiz de multiplicidade m ($m \geq 1$) da equação $P(x) = 0$ se, e somente se, $P(x) = (x - r)^m \cdot Q(x)$ e $Q(r) \neq 0$. Em outras palavras, r é raiz de multiplicidade m de $P(x) = 0$ quando o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - r)^m$ e não é divisível por $(x - r)^{m+1}$.

Teorema das Raízes Conjugadas: "Seja $P(x)$ um polinômio de grau n , $n \geq 2$, e de coeficientes reais. Se $P(x)$ admite o número complexo $z = a + bi$ ($b \neq 0$) como raiz, então $P(x)$ admite também como raiz o número $\bar{z} = a - bi$, complexo conjugado de z ". Isto é, $P(z) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{z}) = 0$

Relações de Girard: Se $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) cujas raízes são $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_1x_2x_3\dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Teorema de Bolzano: "Sejam $P(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e $]a, b[$ um intervalo real aberto.

- 1) Se $P(a)$ e $P(b)$ têm o mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existe raízes da equação em $]a, b[$.
- 2) Se $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em $]a, b[$.

Teoremas sobre Raízes Inteiras e Racionais:

Se p/q (p e q primos entre si) é um número racional que é raiz do polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ com coeficientes inteiros, então:

- (1) q é divisor de a_0 ,
- (2) p é divisor de a_n ,
- (3) $p - mq$ é um divisor de $P(m)$ para m inteiro. Em particular, $p - q$ é um divisor de $P(1)$, $p + q$ é um divisor de $P(-1)$.

CrITÉrio de Eisenstein:

"Seja $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ é um polinômio com coeficientes inteiros. Se $P(x)$ não possui raízes inteiras e se existe um número primo p , tal que a_0 não é divisível por p , $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ são divisíveis por p e a_n não é divisível por p^2 , então $p(x)$ não pode ser fatorado como um produto de dois polinômios com coeficientes inteiros e graus maiores ou iguais a 1."

Demonstração:

Suponhamos que $P(x)$ possa ser fatorado como um produto de dois polinômios com coeficientes inteiros e graus maiores ou iguais a 1.

Então: $P(x) = G(x) \cdot H(x)$ onde $G(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \dots + b_k$ e

$$H(x) = c_0x^m + c_1x^{m-1} + \dots + c_m \quad m + k = n$$

Como a_0 não é divisível por p e $a_0 = b_0c_0$, então b_0 e c_0 não são divisíveis por p . Como a_n não é divisível por p^2 e $a_n = b_nc_n$, então pelo menos um dos valores b_n ou c_n não é divisível por p .

Suponhamos que b_n não seja divisível por p .

Seja c_j o primeiro coeficiente de $H(x)$, da esquerda para a direita, que não é divisível por p .

Isto é possível porque c_0 não é divisível por p .

Então o j -ésimo termo de $P(x)$ é igual a:

$$a_j = b_jc_0 + b_{j-1}c_1 + \dots + b_1c_{j-1} + b_0c_j$$

Notemos que b_0c_j não é divisível por p e todos os outros c 's ($c_1, c_2, \dots, c_{j-1}$) são divisíveis por p .

Portanto $a_j = b_jc_0 + b_{j-1}c_1 + \dots + b_1c_{j-1} + b_0c_j$ não é divisível por p , implicando que a_j seja na verdade a_0 .

Então $G(x) = b_0$, contrariando o enunciado.

Resolução de Equações de 3º grau

Seja a equação geral de 3º grau: $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$

Fazendo a substituição de translação $x = y - A/3$ na equação acima, obteremos

$$y^3 + (B - A^2/3)y + (C - AB/3 + 2A^3/27) = 0$$

e tomando $a = (B - A^2/3)$ $b = C - AB/3 + 2A^3/27$

simplificaremos a equação do terceiro grau na variável y , para

$$y^3 + ay + b = 0$$

Como toda equação desta forma possui pelo menos uma raiz real, nós a encontraremos na forma $y = u + v$ e substituindo y por $u + v$, na última equação, obteremos $(u + v)^3 + a(u + v) + b = 0$ o que equivale a:

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + a(u + v) + b = 0 \quad \text{ou ainda}$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) + b = 0$$

Usando esta última equação e impondo a condição para que:

$$3uv + a = 0 \quad -b = u^3 + v^3$$

teremos encontrado valores de u e v para os quais $y = u + v$ será uma raiz da equação. Estas duas últimas condições implicam que

$$u^3 \cdot v^3 = -a^3/27 \quad u^3 + v^3 = -b$$

Considerando u^3 e v^3 como variáveis, o problema é equivalente a resolver uma equação do segundo grau da forma $z^2 - Sz + P = 0$ onde:

$S =$ soma das raízes $= u^3 + v^3$ e $P =$ produto das raízes $= u^3 \cdot v^3$

Assim, basta resolver a equação do segundo grau $z^2 + bz - a^3/27 = 0$

As raízes são dadas por:

$$z_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

Como $u = \sqrt[3]{z_1}$ e $v = \sqrt[3]{z_2}$, e $y = u + v$, então temos que as raízes de $y^3 + ay + b = 0$ são dadas por:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, mas a equação $u \cdot v = -a/3$ diz que o produto de duas raízes deve ser igual a $-a/3$. Essa fórmula dá as três raízes de $y^3 + py + q = 0$, e como $x = y - A/3$, somando $-A/3$ a cada uma, nos dão as três raízes de $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$.

4.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) Seja o polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, com coeficientes inteiros. Se $P(0)$ e $P(1)$ são números ímpares, então o polinômio $P(x)$ não possui raízes inteiras.

Solução:

Suponhamos que $P(x)$ possua raízes racionais da forma p/q , onde p e q são inteiros primos entre si.

De acordo com o teorema anterior, $p - q$ é um divisor de $P(1)$, que é ímpar, ou seja, $p - q$ também é ímpar.

Como $P(0) = a_n$ é ímpar e p é um divisor de a_n , então p também é ímpar. Como $p - q$ e p são ambos números ímpares, então q é um número par, não podendo ser igual a unidade. Assim p/q nunca vai ser igual a um número inteiro. Portanto $P(x)$ não possui raízes inteiras.

2) Seja $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se a_0, a_n e $P(1)$ são números ímpares, então a equação $P(x) = 0$ não possui raiz racional.

Solução:

Vamos supor que $P(x)$ tenha uma raiz racional p/q , p e q primos entre si e que a_0 e a_n são ímpares.

Substituindo x por p/q , impondo que $P(p/q) = 0$ e multiplicando a equação por q^n , temos:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (*)$$

Notemos que as primeiras n parcelas são divisíveis por p :

$$p \mid a_0 q^n \Rightarrow p \mid a_0 \Rightarrow p \text{ é ímpar}$$

Notemos que as últimas n parcelas são divisíveis por q :

$$q \mid a_n p^n \Rightarrow q \mid a_n \Rightarrow q \text{ é ímpar}$$

Como p e q são ambos ímpares, então a paridade de cada parcela é determinada pelos coeficientes a_i do polinômio, e a paridade de $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$ é determinada pela paridade da soma de todos os coeficientes a_i .

Como $P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0$, a paridade de $P(1)$ também é determinada pela soma dos mesmos coeficientes. Entretanto $P(1)$ é ímpar e $(*)$ é par (igual a zero), que é uma contradição. Portanto $P(x) = 0$ não possui raiz racional.

3) (China-81) Se $P(x) = x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1$, qual é o resto quando $P(x^{100})$ é dividido por $P(x)$?

Solução:

Seja $R(x)$ o resto quando $P(x^{100})$ é dividido por $P(x)$. Como o grau de $P(x)$ é 99, então o grau de $R(x)$ é menor ou igual a 98.

Como $x^{100} - 1 = (x - 1)(x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x + 1)$, temos que cada uma das 99 raízes x_i ($1 \leq i \leq 99$) de $x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x + 1$ satisfazem $x_i^{100} = 1$. Assim, aplicando cada uma das raízes x_i em $P(x^{100})$ para calcular os restos das divisões de $P(x)$ por $x - x_i$, obtemos:

$$P(x_i^{100}) = x_i^{9900} + x_i^{8800} + x_i^{7700} + \dots + x_i^{1100} + 1 = (x_i^{100})^{99} + (x_i^{100})^{88} + (x_i^{100})^{77} + \dots + (x_i^{100})^{11} + 1 \Rightarrow$$

$$P(x_i) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 = 10, \text{ para } i \text{ tal que } 1 \leq i \leq 99$$

Seja $H(x) = R(x) - 10$. Assim, $H(x_i) = 0$, $1 \leq i \leq 99$, ou seja, $x_1, x_2, \dots, x_{99}$ são 99 raízes de $H(x)$. Entretanto, o grau de $H(x)$ é igual ao grau de $R(x)$, ou seja, menor ou igual a 98. Como $H(x)$ possui 99 raízes distintas, então $H(x)$ é o polinômio identicamente nulo, fazendo com $R(x) = 10$.

4) (Canadá-70) Dado o polinômio $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ com coeficientes inteiros $a_1, a_2, \dots, a_n$, e dado que também existem 4 inteiros distintos a, b, c e d tal que $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 5$, mostre que não existe nenhum inteiro k tal que $p(k) = 8$.

Solução:

Analisemos a expressão $p(x) = 5$

Como os inteiros a, b, c, d satisfazem esta equação, temos que

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)q(x) + 5$$

Como $p(x)$ possui coeficientes inteiros, qualquer valor inteiro x implica que $p(x)$ também é inteiro.

$$\text{Para } p(x) = 8 \Rightarrow 8 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)q(x) + 5 \Rightarrow$$

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)q(x) = 3$$

Como não é possível decompor 3 como uma multiplicação de 3 inteiros distintos (poderíamos ter no máximo $3 = (-1)(1)(-3)$, ou seja, multiplicação de 3 inteiros distintos), então esta equação não possui soluções inteiras.

5) (USAMO-83) Prove que as raízes de $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ não podem ser todas reais se $2a^2 < 5b$.

Solução:

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 as raízes do polinômio

$$\text{Se } 2a^2 < 5b \Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 <$$

$$< 5(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_1 x_5 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_5) \Rightarrow$$

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_5^2 - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_1 x_5 + x_2 x_3 + x_2 x_4 +$$

$$x_2 x_5 + x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_5) < 0$$

$$(x_1^2 - (x_1 x_2)/2 + x_2^2) + (x_1^2 - (x_1 x_3)/2 + x_3^2) + (x_1^2 - (x_1 x_4)/2 + x_4^2) + \dots +$$

$$(x_4^2 - (x_4 x_5)/2 + x_5^2) < 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_2)^2/2 + (x_1 - x_3)^2/2 + (x_1 - x_4)^2/2 + \dots + (x_4 - x_5)^2/2 < 0$$

Que torna impossível que todas as raízes sejam reais

6) (Rússia-2000) Sejam a, b, c números reais tais que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + c = 0$ possuem exatamente uma raiz real comum e as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + cx + b = 0$ também possuem exatamente uma raiz comum. Determine a soma $a + b + c$.

Solução:

Seja p a raiz comum de $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$

$$p^2 + ap + 1 = 0 \text{ e } p^2 + bp + c = 0$$

$$\text{Subtraindo: } (a - b)p - c + 1 = 0 \Rightarrow p = (c - 1)/(a - b)$$

Seja q a raiz comum de $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + cx + b = 0 \Rightarrow$

$$q^2 + q + a = 0 \text{ e } q^2 + cq + b = 0$$

$$\text{Assim: } cq - q + b - a = 0 \Rightarrow q = (a - b)/(c - 1) \Rightarrow q = 1/p$$

Entretanto, como $x^2 + ax + 1 = 0$ é uma equação recíproca, então suas raízes são p e $1/p$, ou seja, p e q . Assim, as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + x + a = 0$ possuem uma raiz comum, que é q .

Deste modo: $q^2 + aq + 1 = 0$ e $q^2 + q + a = 0 \Rightarrow aq - q - 1 + a = 0 \Rightarrow q = 1$

Note que $a \neq 1$, pois se $a = 1$ então $x^2 + ax + 1 = x^2 + x + a = x^2 + x + 1$, que não possui raízes reais.

Portanto: $q = 1 \Rightarrow 1 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -2$

Analogamente: $q = 1 \Rightarrow 1 + c + b = 0 \Rightarrow c + b = -1$

Concluimos então que: $a + b + c = -3$

7) (Seletiva IMO-99) Sejam a, b, c, d números reais tais que $a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}}$, $b = \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}}$, $c = \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}}$ e $d = \sqrt{4 + \sqrt{5 + d}}$. Calcule $abcd$.

Solução:

Elevando ao quadrado duas vezes as equações obtemos:

$$(a^2 - 4)^2 = 5 - a \Rightarrow a^4 - 8a^2 + 16 = 5 - a \Rightarrow a^4 - 8a^2 + a + 11 = 0$$

$$(b^2 - 4)^2 = 5 - b \Rightarrow b^4 - 8b^2 + 16 = 5 - b \Rightarrow b^4 - 8b^2 + b + 11 = 0$$

$$(c^2 - 4)^2 = 5 + c \Rightarrow c^4 - 8c^2 + 16 = 5 + c \Rightarrow c^4 - 8c^2 - c + 11 = 0$$

$$(d^2 - 4)^2 = 5 + d \Rightarrow d^4 - 8d^2 + 16 = 5 + d \Rightarrow d^4 - 8d^2 - d + 11 = 0$$

Assim, a e b são 2 das 4 raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 8x^2 + x + 11$ e c e d são 2 das 4 raízes do polinômio $Q(x) = x^4 - 8x^2 - x + 11$

Aplicando $x = -c$ em $P(x)$ temos $P(-c) = c^4 - 8c^2 - c + 11 = 0$

Aplicando $x = -d$ em $P(x)$ temos $P(-d) = d^4 - 8d^2 - d + 11 = 0$

Assim, as raízes de $P(x)$ são $a, b, -c$ e $-d$

Como a multiplicação das raízes $P(x)$ é igual a 11, temos que

$$a \cdot b \cdot (-c) \cdot (-d) = 11 \Rightarrow abcd = 11$$

8) (IMO-93) Seja $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, onde $n > 1$ é um inteiro. Prove que $f(x)$ não pode ser expresso como o produto de dois polinômios não constantes com coeficientes inteiros.

Solução:

I) Como $P(0) = 3$ e $P(1) = 9$ são números ímpares, então $P(x)$ não possui raízes inteiras.

II) Suponhamos que $P(x)$ possa ser fatorado como o produto de dois polinômios não constantes com coeficientes inteiros:

$$P(x) = G(x) \cdot H(x) \text{ onde } G(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \dots + b_k \text{ e}$$

$$H(x) = c_0x^m + c_1x^{m-1} + \dots + c_m \text{ k + m = n}$$

Como $P(x)$ não possui raízes inteiras, então os graus de $G(x)$ e $H(x)$ são maiores que 1.

Como o coeficiente de x^n em $P(x)$ é 1, e $b_0c_0x^{k+m} = x^n \Rightarrow b_0 = c_0 = 1$

$$3 = b_k \cdot c_m \Rightarrow b_k = 1 \text{ e } c_m = 3 \text{ ou } b_k = 3 \text{ e } c_m = 1$$

Notemos que sendo $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = x^n + 5x^{n-1} + 3$ os coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ são todos divisíveis por 5: $a_1 = 5$ e de a_2 até a_{n-1} todos são nulos.

Seja c_j o primeiro coeficiente de $H(x)$, da esquerda para a direita, que não é divisível por 5. Isto é possível porque c_0 não é divisível por 5.

Então o j -ésimo ($1 \leq j \leq n-1$) termo de $P(x)$ é igual a:

$$a_j = b_jc_0 + b_{j-1}c_1 + \dots + b_1c_{j-1} + b_0c_j$$

Notemos que b_0c_j não é divisível por 5 e todos os outros c 's ($c_1, c_2, \dots, c_{j-1}$) são divisíveis por 5.

Portanto $a_j = b_jc_0 + b_{j-1}c_1 + \dots + b_1c_{j-1} + b_0c_j$ não é divisível por 5, que é uma contradição.

4.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS - PARTE A

1) O polinômio $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1$, com $a_i \in \mathbb{R}$, possui n raízes reais negativas. Prove que $P(1) \geq 2^n$.

2) Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos \theta + x \cdot \sin \theta)^n$ por $(x^2 + 1)$, onde n é um número natural.

3) Prove que se $P(x) = p_1(x^3) + xp_2(x^3)$ é divisível por $x^2 + x + 1$, então $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $x - 1$.

4) Se $P(x)$ é um polinômio de grau n tal que $P(k) = \frac{1}{k}$ para $k = 1, 2, \dots, n+1$, determine $P(n+2)$.

5) (Canadá-81) $P(x)$ e $Q(x)$ são dois polinômios que satisfazem a identidade $P(Q(x)) = Q(P(x))$ para todos os números reais x . Se a equação $P(x) = Q(x)$ não possui raízes reais, prove que a equação $P(P(x)) = Q(Q(x))$ também não possui raízes reais.

6) (Polônia-95) Dado um polinômio $P(x)$ com coeficientes inteiros; 2 divide $P(5)$; 5 divide $P(2)$; mostre que 10 divide $P(7)$.

7) (Espanha-96) Sejam a, b, c números reais. Consideram-se as funções: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$. Sabendo que $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$, demonstrar que $|f(x)| \leq 5/4$ e $|g(x)| \leq 2$.

8) (Rússia-62) Prove que não existem inteiros a, b, c, d tais que o polinômio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ é igual a 1 para $x = 19$ e igual a 2 para $x = 62$.

9) (Báltica-96) O gráfico do polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ (onde $n > 1$) cruza a reta $y = b$ nos pontos $B_1, B_2, \dots, B_n$ (da esquerda para a direita), e a reta $y = c$ ($c \neq b$) nos pontos $C_1, C_2, \dots, C_n$ (da esquerda para a direita). Seja P um ponto da reta $y = c$, à direita do ponto C_n . Determine a soma: $\cot(\angle B_1C_1P) + \cot(\angle B_2C_2P) + \dots + \cot(\angle B_nC_nP)$.

10) Seja o polinômio de raízes reais: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, onde $c = ba$. Prove que este polinômio possui duas raízes opostas.

11) Se as equações seguintes são verdadeiras:

$$\frac{x}{a+\alpha} + \frac{y}{b+\alpha} + \frac{z}{c+\alpha} = 1$$

$$\frac{x}{a+\beta} + \frac{y}{b+\beta} + \frac{z}{c+\beta} = 1$$

$$\frac{x}{a+\gamma} + \frac{y}{b+\gamma} + \frac{z}{c+\gamma} = 1$$

prove, sem resolver o sistema, que $x + y + z = a + \alpha + b + \beta + c + \gamma$.

12) Sejam p, q e r as raízes da equação cúbica $ax^3 - bx^2 + cx + d = 0$, onde a, b, c e d são coeficientes reais. Dado que $\arctan p + \arctan q + \arctan r = \pi/4$, onde $\arctan$ denota o seu valor principal, prove que:
 $a = b + c + d$.

13) (OBM-92) A equação $x^3 + px + q = 0$ tem três raízes distintas. Prove que $p < 0$.

14) (Chile-94) Seja x um número tal que $x + \frac{1}{x} = -1$. Calcule $x^{1994} + \frac{1}{x^{1994}}$.

15) (USAMO-84) O produto de duas raízes da equação $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ é -32 . Determine k .

16) (Grécia-95) Se a equação $ax^2 + (c-b)x + (e-d) = 0$ tem raízes reais maiores que 1, provar que a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ tem ao menos uma raiz real.

17) Um polinômio $P(x)$ de grau n satisfaz $P(k) = 2^k$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Determine $P(n+1)$.

18) (Itália-97) Determinar todos os polinômios com coeficientes reais $p(x)$ tais que $(x-1)^2p(x) = (x-3)^2p(x+2)$ para todo x real.

19) (Rússia-2000) Sejam a, b números reais não nulos que satisfazem à equação $a^2b^2(a^2b^2 + 4) = 2(a^6 + b^6)$. Mostre que pelo menos um deles não é racional.

20) (Moldávia-2000) Os números inteiros a, b, c satisfazem à relação $a+b+c=0$. Mostre que o número $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ é um quadrado perfeito.

21) (Rússia-2000) Os coeficientes a e b da equação $x^2 + ax + b = 0$ e suas raízes são quatro números distintos. É possível determinar a equação usando estes quatro números?

22) (Rússia-63) Determine todos os números reais p, q, a, b , que para todo x a equação é verdadeira:
 $(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2 + px + q)^{10}$.

23) (Báltica-2008) O polinômio P possui coeficientes inteiros e $P(x) = 5$ para cinco diferentes inteiros x . Mostre que não existe inteiro x tal que $-6 \leq P(x) \leq 4$ ou $6 \leq P(x) \leq 16$.

24) (Rússia-2001) Os valores da função quadrática $f(x) = x^2 + ax + b$ para dois inteiros consecutivos são os quadrados de dois inteiros também consecutivos. Mostre que os valores da função quadrática são quadrados perfeitos para todos os inteiros.

25) (OBM Jr.-96) a, b, c, d são números reais distintos tais que a e b são as raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$ e c e d são as raízes da equação $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Calcule a soma $a + b + c + d$.

26) (Polônia-94) Ache todos os polinômios $P(x)$ de grau 5, com coeficientes reais, tais que $(x+1)^3 \mid P(x)+1$ e $(x+1)^3 \mid P(x)-1$.

27) (USAMO-89) Seja $P(x) = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_n$ um polinômio na variável complexa x , com coeficientes reais c_k . Suponha que $|P(i)| < 1$. Prove que existem números reais a e b tais que $P(a+bi) = 0$ e $(a^2 + b^2 + 1)^2 < 4b^2 + 1$.

28) (IMO-83 banco) Três raízes da equação $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ são $\tan A, \tan B, \tan C$, onde A, B, C são os ângulos de um triângulo. Determine a quarta raiz em função somente de p, q, r e s .

29) (Iberoamericana-85) Calcule as raízes r_1, r_2, r_3 e r_4 da equação: $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, sabendo que são reais, positivas e que:

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

30) Prove que se $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ é uma raiz de um polinômio cúbico com coeficientes inteiros, então esta é a única raiz real deste polinômio.

31) (Polônia-93) Prove que o polinômio $x^n + 4$ pode ser expresso como um produto de dois polinômios (cada um com grau menor que n) com coeficientes inteiros, se e somente se n é divisível por 4.

32) Seja $P(x) = (x^{1958} + x^{1957} + 2)^{1959} = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Determine o valor de $a_0 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} + a_3 - \frac{a_4}{2} - \frac{a_5}{2} + a_6 - \dots$

33) (Canadá-74) Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes satisfazendo as condições: $0 \leq a_i \leq a_0, i = 1, 2, \dots, n$. Seja $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ os coeficientes do polinômio $(p(x))^2 = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_{2n}x^{2n}$. Prove que $b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(f(1))^2$.

34) (IMO-92 Longlist) Mostre que as raízes de $x^8 - 92x^6 + 134x^4 - 28x^2 + 1$ são $x = \tan(r\pi/15)$, $1 \leq r \leq 15$ e $\text{mdc}(r, 15) = 1$.

35) (Austrália-85) Determine todos os polinômios $p(x)$ com coeficientes reais tais que $p(x).p(x+1) = p(x^2+x+1)$.

36) (USAMO-77) Determine todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que $1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$ é divisível por $1 + x + x^2 + \dots + x^m$.

37) (Putnam-63) Para quais valores inteiros de a , $x^2 - x + a$ divide $x^{13} + x + 90$?

38) (Rússia-2006) Considere o polinômio $p(x) = x^2 + ax + b$. Assuma que a equação $p(p(x)) = 0$ possui quatro raízes reais distintas e que a soma de duas destas soluções é -1 . Prove que $b \leq -1/4$.

39) (Romênia-2002) Determine todos os polinômios f e g tais que $(x^2 + x + 1)f(x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)g(x^2 + x + 1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

40) (Grécia-2005) Determine o polinômio $P(x)$ com coeficientes reais tal que $P(2) = 12$ e $P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

41) (Rússia-2000) Prove a existência de números reais distintos $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ tais que a equação:

$$(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_{10}) = (x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot \dots \cdot (x + a_{10})$$

possua exatamente 5 raízes reais distintas.

42) (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-2000) Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois trinômios quadráticos tais que três das raízes da equação $P(Q(x)) = 0$ são os números $-22, 7$ e 13 . Determine a quarta raiz desta equação.

4.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \dots + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$.

2) Prove que

$$P(x) = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

também pode ser expresso da forma $P(x) = \frac{(-1)^n}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n)$

3) Seja $p(x) = x^4 + x^3 - 1$, e $q(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 1$. Prove que se $p(x) = 0$ então $q(x^2) = 0$.

4) (Wisconsin-97) Determine todos os polinômios $P(x)$ tais que $P(0) = 2$ e $P(x^2 + 1) = P(x^2) + 1$, para todo x .

5) (Irlanda-97) Determine todos os polinômios $p(x)$ satisfazendo a equação $(x-16)p(2x) = 16(x-1)p(x)$ para todo x .

6) (Rússia-73) O polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ é tal que a equação $p(x) = x$ não possui raízes reais. Prove que a equação $p(p(x)) = x$ também não possui raízes reais.

7) (Austrália-84) Determine todos os valores de a e b para os quais o polinômio $x^4 + (2a+1)x^3 + (a-1)^2x^2 + bx + 4$ pode ser fatorado como um produto de dois polinômios $u(x)$ e $v(x)$, cada um de grau 2 com

coeficientes de x^2 igual a 1, tal que a equação $v(x) = 0$ possui duas raízes diferentes α e β (não necessariamente reais), e $u(\alpha) = \beta$ $u(\beta) = \alpha$.

8) (Espanha-95) Demonstre que no caso em que as equações:

$$x^3 + mx - n = 0, \quad nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0,$$

($n \neq 0$) tenham uma raiz comum, a primeira terá duas raízes iguais e determine então as raízes das duas equações em função de n .

9) (Inglaterra-91) a) Determine todos os inteiros k tais que o polinômio $x^{2k+1} + x + 1$ é divisível pelo polinômio $x^k + x + 1$. b) Para tal k , especifique o inteiro n para o qual $x^n + x + 1$ é divisível por $x^k + x + 1$.

10) (USAMO-77) Se a e b são duas raízes de $x^4 + x^3 - 1 = 0$, prove que ab é uma raiz de $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$.

11) (USAMO-74) Sejam a, b, c três inteiros distintos, e P um polinômio possuindo todos os coeficientes inteiros. Mostre que é impossível que $P(a) = b$, $P(b) = c$ e $P(c) = a$.

12) (Canadá-82) Se a, b e c são as três raízes da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$,

(i) mostre que a, b e c são distintos;

(ii) mostre que $\frac{a^{1982} - b^{1982}}{a - b} + \frac{b^{1982} - c^{1982}}{b - c} + \frac{c^{1982} - a^{1982}}{c - a}$ é um inteiro.

13) (Canadá-96) Se α, β, γ são as raízes de $x^3 - x - 1 = 0$, calcule o valor de $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

14) (Iberoamericana-87) Se r, s e t são as raízes da equação

$$x(x-2)(3x-7) = 2$$

a) Demonstre que r, s e t são positivos.

b) Calcule: $\arctan r + \arctan s + \arctan t$.

Nota: Denota-se com $\arctan x$, o arco compreendido entre 0 e π cuja tangente é x .

15) (Irlanda-93) Seja $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ números reais, onde $n \geq 1$, e seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ tal que $|f(0)| = f(1)$ e cada raiz α de f é real satisfazendo $0 < \alpha < 1$. Prove que o produto destas raízes não excede $1/2^n$.

16) (Grécia-97) Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros, que tem 13 diferentes raízes inteiras. Provar que se n é um inteiro com $P(n) \neq 0$ então $|P(n)| \geq 7 \cdot (6!)^2$.

Dar um exemplo de um polinômio com coeficientes inteiros e 13 diferentes raízes inteiras tais que para um inteiro n , $|P(n)| = 7 \cdot (6!)^2$.

17) (Polônia-94) Prove que se o polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ possui três raízes reais distintas, então também possui três raízes reais distintas o polinômio $x^3 + ax^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b)x + \frac{1}{8}(ab - c)$.

18) (Áustria-98) Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que a equação $x^3 - 17x^2 + ax - b^2 = 0$ possua três raízes inteiras (não necessariamente distintas).

19) As cem raízes do polinômio $P(x) = x^{100} - 600x^{99} + a_{98}x^{98} + \dots + a_1x + a_0$ são reais, e $P(7) > 1$. Demonstre que $P(x)$ tem alguma raiz maior que 7.

20) (OBM-2011) Seja $P(x)$ um polinômio de coeficientes inteiros. Sabe-se que $P(x) = 2011$ tem pelo menos duas raízes inteiras distintas iguais a 1 e t , e que $P(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz inteira. Determine todos os possíveis valores de t .

21) (Iberoamericana-90) Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3 com coeficientes racionais. Provar que se o gráfico de f é tangente ao eixo x , então $f(x)$ tem suas 3 raízes racionais.

22) (IMO-89 Shortlist) Determine as raízes r_i do polinômio $P(x) = x^n + nx^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ satisfazendo $r_1^{16} + r_2^{16} + \dots + r_n^{16} = n$.

23) (IMO-96 Shortlist) Seja P o polinômio real $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Prove que se $|P(x)| \leq 1$ para todo x tal que $|x| \leq 1$, então $|a| + |b| + |c| + |d| \leq 7$.

24) (IMO-82 Shortlist) Determine todos os valores reais do parâmetro a tal que a equação $16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$ possui 4 raízes formando uma progressão geométrica.

25) (IMO-88 Longlist) Assumindo que as raízes de $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ são números reais e positivos, determine uma relação entre p, q e r que forneça uma condição necessária para que as raízes sejam os cossenos que três ângulos de um triângulo.

26) (África do Sul-2007) Considere a equação $x^4 = ax^3 + bx^2 + cx + 2007$, onde a, b, c são números reais. Determine o maior valor de b para o qual esta equação possui exatamente três soluções distintas, todas inteiras.

27) (Espanha-2005) Sejam a, b, c números reais não nulos e $a \neq b$. Prove que se as equações $x^2 + ax + bc = 0$ e $x^2 + bx + ca = 0$ tem uma raiz comum, então as restantes raízes verificam a equação $x^2 + cx + ab = 0$.

28) (Espanha-2005) Sejam x_1, x_2 as raízes do polinômio $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, sendo m um número real. Provar que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

29) (Putnam-40) Prove que se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros, e existe um inteiro k tal que nenhum dos inteiros $p(1), p(2), \dots, p(k)$ é divisível por k , então $p(x)$ não possui raízes inteiras.

30) (Báltica-97) Sejam P e Q polinômios com coeficientes inteiros. Suponha que os inteiros a e $a + 1997$ são raízes de P , e que $Q(1998) = 2000$. Prove que a equação $Q(P(x)) = 1$ não possui soluções inteiras.

31) (Báltica-2004) Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes não negativos. Prove que se a inequação $P\left(\frac{1}{x}\right)P(x) \geq 1$ é válida para $x = 1$, então esta inequação é válida para todo x real positivo.

32) (Índia-2004) Se a é uma raiz real de $x^5 - x^3 - x - 2 = 0$, mostre que $[a^6] = 4$.

33) (OBM-95) Prove que nenhuma raiz do polinômio $G(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ é raiz n -ésima de um número racional, $n > 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

34) (Indonésia-2010) Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros. Assuma que existem inteiros a e b tais que $p(a) = 41$ e $p(b) = 49$. Prove que existe um inteiro c tal que 2009 divide $p(c)$.

35) (Suíça-2004) Sejam a, b, c, d números reais distintos satisfazendo as equações:

$$a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}}, b = \sqrt{45 - \sqrt{21 - b}}, c = \sqrt{45 - \sqrt{21 - c}}, d = \sqrt{45 - \sqrt{21 - d}}$$

Prove que $abcd = 2004$.

SEQUÊNCIAS

5.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

O tópico de sequências recorrentes é praticamente cobrado apenas em provas de olimpíadas de matemática, sendo muito pouco explorado em provas de vestibular. Mesmo assim, devido à relativa complexidade das soluções é apenas cobrado em olimpíadas de ensino médio.

As questões típicas de olimpíadas exploram uma série de propriedades dos termos de uma sequência, como demonstrar que determinado termo é quadrado perfeito, achar o termo geral de uma sequência a partir da relação de recorrência, calcular a soma dos termos da sequência, entre outros.

5.2. RESUMO TEÓRICO

Sequência Recorrente Linear: Afirmamos que uma sequência (a_n) possui uma equação de recorrência linear se é da forma

$$a_n = k_{n-1} \cdot a_{n-1} + k_{n-2} \cdot a_{n-2} + \dots + k_1 \cdot a_1 + k_0 \cdot a_0,$$

onde k_i são constantes reais.

Sequências Lineares de 1ª Ordem: As sequências recorrentes de 1ª ordem são da forma $x_n = a \cdot x_{n-1}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Se $a = 1$ a sequência é constante, com termo geral dado por $x_n = x_1$, $n \geq 1$. Se $a \neq 1$ a sequência é uma progressão geométrica de razão a , cujo termo geral é $x_n = x_1 \cdot a^{n-1}$, $n \geq 1$. Se uma sequência x_n é definida pela equação linear de recorrência $x_n = a \cdot x_{n-1} + b$ então $x_n = \left(x_1 + \frac{b}{a-1}\right) a^{n-1} - \frac{b}{a-1}$.

Sequências Recorrente de 2ª ordem: Se uma sequência é dada por $x_n = a \cdot x_{n-1} + b \cdot x_{n-2}$ então o termo geral é dado por

$$x_n = \frac{(x_1 - \beta \cdot x_0)}{\alpha - \beta} \alpha^n + \frac{(\alpha \cdot x_0 - x_1)}{\alpha - \beta} \beta^n,$$

onde α e β são as raízes da equação característica $x^2 = ax + b$, com $\alpha \neq \beta$. Se $\alpha = \beta$ o termo geral é dado por $x_n = x_0 \cdot \alpha^n + n(x_1 - \alpha \cdot x_0) \alpha^{n-1}$.

5.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) Determine em função de n o termo geral da sequência definida por:

$$a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 2 \quad (n \geq 1)$$

Solução:

Perceba que $a_n = 3a_{n-1} + 2 \Leftrightarrow (a_n + 1) = 3(a_{n-1} + 1) \Rightarrow$ a sequência $a_n + 1$ é uma PG de razão 3. Assim: $a_n + 1 = (a_0 + 1)3^n \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^n - 1$

2) Determine em função de n o termo geral da sequência definida por:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = \frac{2a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$$

Solução:

Podemos reescrever o termo geral da forma: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

Deste modo, a sequência $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ é uma PG de razão 2:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{a_1}{a_0} \right) 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^n a_{n-1}$$

Assim $a_n = 2^n a_{n-1} = 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot a_{n-2} = 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot a_{n-3} =$

$$= 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot \dots \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot a_0 = (2^{1+2+3+\dots+n-1+n}) \cdot a_0 \Rightarrow a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

3) (UIUC Undergrad Math Contest-97) Sejam $x_1 = x_2 = 1$, e $x_{n+1} = 1996x_n + 1997x_{n-1}$ para $n \geq 2$. Determine (com prova) o resto da divisão de x_{1997} por 3.

Solução:

Como $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} + 1995(x_n + 2x_{n-1})$ podemos analisar somente $y_{n+1} = y_n + 2y_{n-1}$

A equação característica desta sequência é $y^2 - y - 2 \Rightarrow$

$$(y-2)(y+1) \Rightarrow y = -1 \text{ e } y = 2 \Rightarrow y_n = A(2)^n + B(-1)^n$$

Como $y_1 = 1 \Rightarrow 2A - B = 1$ e $y_2 = 1 \Rightarrow 4A + B = 1 \Rightarrow A = 1/3$ e $B = -1/3$

$$\text{Assim: } y_n = [2^n - (-1)^n]/3 \Rightarrow y_{1997} = [2^{1997} - (-1)^{1997}]/3 \Rightarrow$$

$$y_{1997} = [2^{1997} + 1]/3$$

Analisemos agora o resto de $2^{1997} + 1$ por 9:

$$\text{Sabemos que } 2^3 \equiv -1 \pmod{9} \Rightarrow (2^3)^{665} \equiv (-1)^{665} \pmod{9} \Rightarrow$$

$$2^{1995} \equiv -1 \pmod{9} \Rightarrow 2^{1997} \equiv -4 \pmod{9} \Rightarrow 2^{1997} \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow$$

$$2^{1997} + 1 \equiv 6 \pmod{9}$$

$$\text{Assim, } 2^{1997} + 1 = 9k + 6 \Rightarrow [2^{1997} + 1]/3 = 3k + 2 \Rightarrow$$

resto de x_{1997} por 3 é 2.

4) Seja a sequência a_n definida por $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$, ($n \geq 3$).

Mostre que todos os a_i são inteiros.

Solução:

Aplicando $n = 2$ obtemos $a_2 = 3$. A sequência é equivalente a

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 2.$$

Substituindo n por $n+1$: $a_{n+1} a_{n-1} = a_n^2 + 2$

Subtraindo estas duas equações: $a_{n+1} a_{n-1} - a_n a_{n-2} = a_n^2 - a_{n-1}^2 \Rightarrow$

$$a_{n+1} a_{n-1} + a_{n-1}^2 = a_n a_{n-2} + a_n^2 \Rightarrow$$

$$a_{n-1}(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n(a_{n-2} + a_n) \Rightarrow \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

Desenvolvendo esta última expressão para valores inferiores de n :

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = \frac{a_{n-2} + a_{n-4}}{a_{n-3}} = \dots = \frac{a_2 + a_0}{a_1} = 4$$

Assim, temos que diretamente que $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$, que é uma sequência composta somente de inteiros.

5) (Inglaterra-97) Para os inteiros positivos n , a sequência $a_1, a_2, a_3, \dots$,

$a_n, \dots$ é definida por $a_1 = 1$, $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1} \right) (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$, $n > 1$. Determine o

valor de a_{1997} .

Solução:

Pelo enunciado temos que, para todo n : $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = \frac{(n-1)a_n}{n+1}$ (1)

Escrevendo esta última equação para $n+1$ temos:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{n \cdot a_{n+1}}{n+2} \quad (2)$$

$$\text{Subtraindo (1) e (2): } a_n \frac{(n-1)a_n}{n+1} = \frac{n \cdot a_{n+1}}{n+2} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2(n+2)}{n+1} a_n$$

$$\text{Assim, } a_{n+1} = \frac{2(n+2)}{n+1} \cdot \frac{2(n+1)}{n} \cdot \frac{2n}{2(n-1)} \dots \frac{2 \cdot 3}{2} a_1 \Rightarrow a_{n+1} = 2^{n-1} (n+2) a_1 \Rightarrow$$

$$a_{1997} = 1998 \cdot 2^{1995}$$

6) (Inglaterra-83) A sequência de números reais $x_1, x_2, x_3, \dots$ é definida por $x_1 = a \neq -1$ e $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ para todo $n \geq 1$. Seja S_n a soma e P_n o produto dos n primeiros termos da sequência $y_1, y_2, y_3, \dots$, onde

$$y_n = \frac{1}{1+x_n}. \text{ Prove que } aS_n + P_n = 1 \text{ para todo } n.$$

Solução:

$$\text{Seja } y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_n^2}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

$$\text{Então: } P_n = y_1 y_2 \dots y_n = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{a}{x_{n+1}}$$

Para a soma temos:

$$S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x_{n+1}}$$

Assim temos diretamente que: $aS_n + P_n = 1$

7) (Torneio das Cidades-92) Considere a sequência a_n definida pelas seguintes condições $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$. Prove que a sequência

contém um número infinito de termos que são quadrados perfeitos.

Obs: $\lfloor x \rfloor$ significa a parte inteira de x , ou seja, o maior inteiro que é menor ou igual a x .

Solução:

Observemos que $a_0 = 1 = 1^2$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_4 = 4 = 2^2$; $a_5 = 6$; $a_6 = 8$; $a_7 = 10$; $a_8 = 13$; $a_9 = 16 = 4^2$; ...

Suponhamos que $a_n = m^2$, para alguns n e m naturais.

Vamos mostrar, por indução, que para $0 \leq t \leq m$ temos:

$$a_{n+2t+1} = (m+t)^2 + m - t \text{ e } a_{n+2t+2} = (m+t)^2 + 2m.$$

Para $t = 0$ temos $a_{n+1} = m^2 + m$ e $a_{n+2} = m^2 + 2m$.

Suponhamos que o resultado seja válido para algum t , $0 \leq t < m$.

Neste caso $(m+t)^2 < a_{n+2t+1} < (m+t+1)^2$, ou seja $\lfloor \sqrt{a_{n+2t+1}} \rfloor = m+t$.

Analogamente: $(m+t)^2 < a_{n+2t+2} < (m+t+1)^2$, ou seja:

$$\lfloor \sqrt{a_{n+2t+2}} \rfloor = m+t.$$

$$\text{Assim: } a_{n+2(t+1)+1} = a_{n+2t+2} + \lfloor \sqrt{a_{n+2t+2}} \rfloor = (m+t)^2 + 2m + m + t =$$

$$= (m+t)^2 + 3m + t = (m+t+1)^2 + m - (t+1)$$

Observemos que $(m+t+1)^2 < a_{n+2t+3} < (m+t+2)^2$

$$a_{n+2(t+1)+2} = a_{n+2t+3} + \lfloor \sqrt{a_{n+2t+3}} \rfloor = (m+t)^2 + 3m + t + m + t + 1 =$$

$$= (m+t)^2 + 4m + 2t + 1 = (m+t+1)^2 + 2m$$

Da mesma forma temos que $(m+t+1)^2 < a_{n+2t+4} < (m+t+2)^2$

Isto completa a indução. Assim, temos que nenhum dos números a_{n+1} , a_{n+2} , ..., a_{n+2m} é quadrado perfeito.

Por outro lado, para $t = m$ temos $a_{n+2m+1} = (m+m)^2 + m - m \Rightarrow$

$a_{n+2m+1} = (2m)^2$, ou seja, a sequência contém um número infinito de termos que são quadrados perfeitos.

8) (IMO-96 Shortlist) Seja $a > 2$ um número dado, e define-se recursivamente $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_{n+1} = \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2 \right) a_n$. Mostre que para todos os

inteiros $k > 0$ tem-se $\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k} < \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2 - 4})$.

Solução:

Como $a > 2$ então existe $b > 1$ tal que $a = b + \frac{1}{b}$, ou seja, $b^2 - ab + 1 = 0 \Rightarrow$

$$b = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2 - 4}) = 1 + \frac{1}{b}. \text{ Assim,}$$

devemos provar que $S_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{a_i} < 1 + \frac{1}{b}$.

$$\text{Notemos que } a_1 = b + \frac{1}{b} \text{ e que } a_2 = \left(b + \frac{1}{b} \right) \left(b^2 + \frac{1}{b^2} \right).$$

Por indução demonstra-se que:

$$a_n = \left(b + \frac{1}{b} \right) \left(b^2 + \frac{1}{b^2} \right) \dots \left(b^{2^{n-1}} + \frac{1}{b^{2^{n-1}}} \right) \Rightarrow a_n = \frac{(b^2 + 1)(b^4 + 1) \dots (b^{2^n} + 1)}{b^{2^n - 1}}.$$

$$\text{Deste modo, para } n \geq 2: S_n = 1 + \frac{b}{b^2 + 1} + \sum_{i=2}^n \frac{b^{2^{i-1}}}{(b^2 + 1)(b^4 + 1) \dots (b^{2^i} + 1)} \quad (1)$$

Notemos que:

$$\frac{b^{2^{i-1}}}{(b^2 + 1) \dots (b^{2^i} + 1)} = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{(b^2 + 1) \dots (b^{2^{i-1}} + 1)} - \frac{1}{(b^2 + 1) \dots (b^{2^{i-1}} + 1)(b^{2^i} + 1)} \right]$$

Substituindo em (1):

$$S_n = 1 + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{b^2 + 1} - \frac{1}{(b^2 + 1) \dots (b^{2^n} + 1)} \right) < 1 + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{1}{b(b^2 + 1)} = 1 + \frac{1}{b},$$

para $n \geq 2$.

Como $S_1 = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{b^2 + 1} < 1 + \frac{1}{b}$, o resultado pode ser estendido para $n \geq 1$.

5.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) (Bélgica-86) Uma sequência de números $\{a_k\}$ é definida como segue: $a_0 = 0$, $a_{k+1} = 3a_k + 1$, $k \geq 0$. Mostre que a_{155} é divisível por 11.

2) (Iugoslávia-76) Calcule a soma $a_1 + a_2 + \dots + a_{99}$ onde:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$$

3) (Torneio das Cidades-97) A sequência x_n está definida pelas seguintes condições: $x_1 = 19$; $x_2 = 97$; $x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$. Demonstrar que existe um termo desta sequência que é igual a 0. Determinar o subíndice deste termo.

4) (Canadá-88) Sejam $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$; $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$. Mostre para todo $n \geq 0$ que $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$.

5) (UIUC Undergrad Math Contest-98) Uma sequência $a_0, a_1, a_2, \dots$ de números reais é definida recursivamente por $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Determine uma fórmula geral para a_n .

6) (Putnam-93) Uma sequência de números reais não nulos satisfaz $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$ para $n \geq 1$. Prove que existe um número real α tal que $a_{n+1} = \alpha a_n - a_{n-1}$ para $n \geq 1$.

7) (Putnam-99) A sequência (a_n) , $n \geq 1$ é definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 24$, e, para $n \geq 4$, $a_n = \frac{6a_{n-1}^2a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}$. Mostre que, para todo n , a_n é um inteiro múltiplo de n .

8) Três sequências x_n, y_n, z_n com termos iniciais x_1, y_1, z_1 são definidas para $n \geq 1$ por $x_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n}$ e $z_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n}$. Mostre que ao menos um dos valores $x_{200}, y_{200}, z_{200}$ é maior que 20.

9) (Furman University-96) Seja $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, e, para $n \geq 2$, seja $u_n = 2u_{n-1} + 7u_{n-2}$. Mostre que $u_n \leq 4^n$ para todo $n \geq 0$.

10) Uma sequência é definida por $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{10x_n}$. Mostre que $4/5 \leq x_n \leq 5/4$ para todo $n > 1$.

11) (Irlanda-98) Uma sequência de números reais x_n é definida recursivamente como segue: x_0, x_1 são números reais positivos arbitrários, e $x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Calcule x_{1998} .

12) Uma sequência é definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$.

Mostre que $a_{9000} > 30$.

13) (OBM-93) Uma sequência é definida por $a_1 = 8$, $a_2 = 18$ e $a_{n+2} = a_n + 16a_{n+1}$ para todo natural $n \geq 1$. Determine todos os valores de n para os quais a_n é quadrado perfeito.

14) (Ucrânia-96) A sequência $\{a_n\}$, $n \geq 0$, é tal que $a_0 = 1$, $a_{499} = 0$, e para $n \geq 1$, $a_{n+1} = 2a_1a_n - a_{n-1}$.

a) Prove que $|a_1| \leq 1$.

b) Determine a_{1996} .

15) (Moldávia-98) A sequência (a_n) , $n \in \mathbb{N}^*$, verifica as relações: $a_1 = 1/2$, $a_n = a_{n-1}/(2na_{n-1} + 1)$ para todo número natural $n > 1$.

Calcule $a_1 + a_2 + \dots + a_{1998}$.

16) (Rússia-62) Dados os números inteiros $a_1, a_2, \dots, a_{99}, a_{100}$. Sabe-se que: $a_1 > a_0$, $a_1 > 0$, $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1$, ..., $a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. Prove que $a_{100} > 2^{99}$.

17) (Hong Kong-98) O termo geral da sequência $\{a_n\}$ é dado por $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. Se a soma dos primeiros 1997 termos é 1879 e a soma dos primeiros 1879 termos é 1997, qual é a soma dos primeiros 2000 termos?

18) (Índia-96) Define-se uma sequência a_n , $n \geq 1$, por $a_1 = 1, a_2 = 2$ e $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, para $n \geq 1$. Prove que para todo m , $a_m \cdot a_{m+1}$ também é um termo na sequência.

19) (Cone Sul-96) Considera uma sequência de números reais definida por: $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. Demonstrar que, qualquer que seja o número real positivo a_0 , cumpre-se que a_{1996} é maior que 63.

20) (Iberoamericana banco) Prove que $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{1991}}}} < 2$.

21) (Torneio das Cidades-95) A sequência 1, 2, 3, 4, 5, 119, ... de 70 inteiros é definida pela seguinte regra: cada um dos inteiros (iniciando do sexto) é o produto de todos os seus precedentes menos 1. Prove que a soma dos quadrados destes 70 inteiros é igual ao seu produto.

22) (Canadá-86) Seja $u_1, u_2, u_3, \dots$ uma sequência de inteiros satisfazendo a relação de recorrência $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n$. Suponha $u_1 = 39$ e $u_2 = 45$. Prove que 1986 divide infinitos termos da sequência.

23) (IMO-88 Shortlist) Uma sequência $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 1/2$ e para cada $n \geq 2$, $a_n = \left(\frac{2n-3}{2n}\right)a_{n-1}$. Prove que $\sum_{k=1}^n a_k < 1$ para todo $n \geq 1$.

24) (Rússia-2000) A sequência de números reais $(a_1, a_2, \dots, a_{2000})$ satisfaz a condição: $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$ para todo n , $1 \leq n \leq 2000$. Mostre que todo elemento da sequência é um número inteiro.

25) (Romênia-2002) Considere a sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ definida por $a_0 = a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Prove que para todo $n \geq 0$, $2a_n - 1$ é um quadrado perfeito.

26) (Balcânica-2002) A sequência $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ é definida por $a_1 = 20$, $a_2 = 30$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$, para $n > 1$. Determine todos os inteiros positivos n para os quais $1 + 5a_n a_{n+1}$ é um quadrado perfeito.

5.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) (JIR McKnight-87) Determine o termo geral da sequência dada por $a_1 = 2$, $x_2 = 5$ e $x_k = x_{k-1} + 2x_{k-2}$, para $k > 2$.

2) Seja a sequência de Fibonacci definida por $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n > 1$. Prove que, para cada n , existe um número de Fibonacci terminando em n zeros.

3) Seja $\{x_n\}$ uma sequência satisfazendo $x_{n+1} = \frac{\sqrt{3x_n - 1}}{x_n + \sqrt{3}}$, $n \geq 1$. Prove que a sequência é periódica.

4) Prove que todos os termos da sequência dada por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$ são inteiros.

5) (Chile-91) Sejam $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, e para cada natural $n > 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Calcule o valor da soma: $x = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{8}a_3 + \dots + \frac{1}{2^n}a_n + \dots$

6) (Inglaterra-94) A sequência de inteiros $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ satisfaz $u_0 = 1$ e $u_{n+1}u_{n-1} = ku_n$ para cada $n \geq 1$, onde k é algum inteiro positivo fixado. Se $u_{2000} = 2000$, determine todos os valores possíveis de k .

7) (Manhattan Area-99) Na sequência: 1, 1, 2, 3, 7, 22, 155, 3411, ... todo termo é igual ao produto dos dois termos anteriores mais 1. Prove que não existe nenhum termo nesta sequência que é divisível por 4.

8) (Iberoamericana-92) Para cada inteiro positivo n , seja a_n o último dígito do número $1 + 2 + 3 + \dots + n$. Calcular $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1992}$.

9) (USAMO-73) Sejam $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ duas sequências de inteiros definidas por:

$$X_0 = 1, X_1 = 1, X_{n+1} = X_n + 2X_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$Y_0 = 1, Y_1 = 7, Y_{n+1} = 2X_n + 3Y_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Assim, os primeiros termos das sequências são:

$$X: 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots$$

$$Y: 1, 7, 17, 55, 161, 487, \dots$$

Prove que, exceto por "1", não existem termos que ocorrem em ambas sequências.

10) (Vietnam-98) A sequência $\{a_n\}$ é definida por $a_0 = 20$, $a_1 = 100$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n + 20$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. Determine o menor inteiro positivo h satisfazendo $a_{n+h} - a_n$ é divisível por 1998 para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

11) (Bulgária-83) A sequência $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ é definida pela equação de recorrência $a_n = a_{n-1}a_{n-2}a_{n-4}$, $n = 5, 6, \dots$. É sabido que $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$ e $a_4 = -1$. Determine a_{1983} .

12) (Vietnam-87) Construam-se duas sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$:

$$x_0 = 365, x_{n+1} = x_n(x_n^{1986} + 1) + 1622 \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

$$y_0 = 16, y_{n+1} = y_n(y_n^3 + 1) - 1952 \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Prove que $x_n \neq y_k$ para todos inteiros positivos n, k .

13) (Torneio das Cidades) A sequência é definida por: $a_0 = 9$, $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$, $n > 0$. Mostre que a_{10} contém mais do que 1000 nove em sua representação decimal.

14) (IMO-88 Shortlist) Seja $\{a_n\}$ uma sequência que satisfaz: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$ ($n \geq 1$). Prove que se $n > 5$ é um primo, então n divide $a_n(a_n + 1)$.

15) (Báltica-96) Uma sequência de inteiros $a_1, a_2, \dots$ é tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e para $n \geq 1$, $a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n & \text{se } a_n \cdot a_{n+1} \text{ é par} \\ a_{n+1} - a_n & \text{se } a_n \cdot a_{n+1} \text{ é ímpar} \end{cases}$.
Prove que $a_n \neq 0$ para todo n .

16) (Hong Kong-91) Seja $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ uma sequência de números reais tais que $a_1 = 1$, $4a_n a_{n+1} = (a_n + a_{n+1} - 1)^2$ e $a_n < a_{n+1}$ para $n \geq 1$. Determine a_n .

17) (Irlanda-94) Uma sequência $\{x_n\}$ é definida por:
 $x_1 = 2$ e $nx_n = 2(2n-1)x_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$
Prove que x_n é um inteiro positivo para todo inteiro positivo n .

18) (Wisconsin-94) Para cada inteiro não negativo, nós associamos um novo inteiro $f(n)$. Suponha que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, e que para $n \geq 2$ nós temos $f(n) - 2f(n-1) + f(n-2) = (-1)^n(2n-4)$. Descreva $f(n)$ em termos de n .

19) (Canadá-85) Seja $1 < x_1 < 2$ e, para $n = 1, 2, \dots$, define-se $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2$. Prove que, para $n \geq 3$, $|x_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^n}$.

20) (IMO-98 Longlist) Seja $\{a_n\}$ uma sequência tal que $a_0 = a_1 = 5$ e $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{98}$ para todos os inteiros positivos n . Prove que $(a_n + 1)/6$ é um quadrado perfeito para todo n inteiro não negativo.

21) Seja $\{x_n\}$ uma sequência tal que $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 41$ e $x_{n+3} = \frac{2008 + x_{n+2}x_{n+1}}{x_n}$ para todo n inteiro positivo. Prove que todos os membros da sequência são números naturais.

22) (China South East-2008) Seja $\{a_n\}$ uma sequência satisfazendo $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 2a_n + n(1 + 2^n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Determine o termo geral de $\{a_n\}$.

23) Seja $(x_n)_{n \geq 0}$ dada por $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ e $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$. Prove que, para todo $i \in \mathbb{N}^*$, existe um número $j \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_i \mid x_j$.

TRIGONOMETRIA

6.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Assunto relativamente pouco cobrado em provas de Olimpíada de Matemática. No passado teve uma frequência de cobrança maior, porém mais recentemente vem sendo cobrado apenas em algumas poucas olimpíadas e apenas no nível de Ensino Médio.

6.2. RESUMO TEÓRICO

Definição:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}, \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Relação Fundamental da Trigonometria

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{Consequências: } \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{sec}^2 \alpha \quad \text{e} \quad \operatorname{cot}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

Paridade:

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t) \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}(-t) = \operatorname{cos}(t)$$

A função seno é uma função ímpar e a função cosseno é uma função par.

Periodicidade:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}(t + 2\pi) = \operatorname{cos} t$$

As funções seno e cosseno são periódicas de período 2π .

$$\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg}(t) \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg}(t + \pi) = \operatorname{cotg}(t)$$

As funções tangente e cotangente são periódicas de período π .

Valores do argumento θ (radianos)

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen} \theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\operatorname{cos} \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{tan} \theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{cotg} \theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Fórmulas de adição

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

Fórmulas de subtração

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

Fórmulas de duplicação

$$\sin(2\theta) = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Fórmulas de bissecção

$$\sin(\alpha/2) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos(\alpha/2) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Transformação de Soma em Produto

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Funções Inversas

Função	Domínio	Contradomínio
$\arcsin(a)$	$a \in [-1, +1]$	$[-\pi/2, +\pi/2]$
$\arccos(a)$	$a \in [-1, +1]$	$[0; +\pi]$
$\operatorname{arctg}(a)$	$a \in \mathbb{R}$	$]-\pi/2, +\pi/2[$
$\operatorname{arccotg}(a)$	$a \in \mathbb{R}$	$]0; +\pi[$

Equações

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

6.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) Demonstre que se A, B e C são ângulos de um triângulo então:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1$$

Solução:

Sabe-se que $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Assim:

$$\cos^2 A + \cos^2 B = 1 + \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} = 1 + \cos(A+B) \cos(A-B)$$

$$\text{Como } A + B = 180^\circ - C: \cos^2 A + \cos^2 B = 1 - \cos C \cdot \cos(A-B)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= 1 - \cos C \cdot \cos(A-B) + \cos^2 C = \\ &= 1 - \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 1 + 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \Rightarrow \\ \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C &= 1 \end{aligned}$$

Obs: Da mesma forma, pode-se também demonstrar que:

$$-\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cdot \cos A \cdot \sin B \cdot \sin C = 1$$

$$\cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cdot \sin A \cdot \cos B \cdot \sin C = 1$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C + 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C = 1$$

2) (AIME-2013) Sejam A, B e C os ângulos de um triângulo, sendo A e C agudos, com:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C = 15/8$$

$$\cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cdot \cos A \cdot \sin B \cdot \sin C = 14/9$$

Determine o valor de $\cos^2 A + \cos^2 C + 2 \cdot \sin A \cdot \cos B \cdot \sin C$.

Solução:

Como $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C + 2.\text{sen } A.\text{sen } B.\cos C = 1 \Rightarrow$

$$1 + \cos^2 C = 15/8 \Rightarrow \cos^2 C = 7/8 \Rightarrow \cos C = \frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \text{sen } C = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Como $-\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2.\cos A.\text{sen } B.\text{sen } C = 1 \Rightarrow$

$$1 + \cos^2 A = 14/9 \Rightarrow \cos^2 A = 5/9 \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{2}{3}$$

Como A, B e C são ângulos de um triângulo: $B = 180^\circ - (A + C) \Rightarrow$

$$\cos B = -\cos(A + C) = -(\cos A.\cos C - \text{sen } A.\text{sen } C) \Rightarrow$$

$$\cos B = -\left(\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{70}}{12}$$

Como $\cos^2 A + \cos^2 C - \cos^2 B + 2.\text{sen } A.\cos B.\text{sen } C = 1$, segue que:

$$\cos^2 A + \cos^2 C + 2.\text{sen } A.\cos B.\text{sen } C = 1 + \cos^2 B = \frac{111 - 4\sqrt{35}}{72}$$

3) Encontre o valor máximo da expressão

$$xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

Solução:

Para que esta expressão faça sentido devemos ter:

$$1 - x^2 \geq 0 \text{ e } 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \text{ e } y^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1$$

Seja então $x = \cos \alpha$ e $y = \cos \beta$ ($0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$):

$$P = xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} =$$

$$= \cos \alpha.\cos \beta + \cos \alpha.\sqrt{1-\cos^2 \beta} + \cos \beta.\sqrt{1-\cos^2 \alpha} - \sqrt{(1-\cos^2 \alpha)(1-\cos^2 \beta)} =$$

$$= \cos \alpha.\cos \beta + \cos \alpha.\text{sen } \beta + \cos \beta.\text{sen } \alpha - \text{sen } \alpha.\text{sen } \beta = \cos(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha + \beta) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen}(\alpha + \beta) \right) = \sqrt{2} \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha + \beta \right) \leq \sqrt{2}$$

4) Prove que $\text{tg}^2 4^\circ + \text{tg}^2 8^\circ + \text{tg}^2 12^\circ + \dots + \text{tg}^2 88^\circ = 990$.

Solução:

Seja $z = \cos \theta + i.\text{sen } \theta \Rightarrow z^{45} = (\cos \theta + i.\text{sen } \theta)^{45} = \cos 45\theta + i.\text{sen } 45\theta$

$$\cos 45\theta = \binom{45}{0} \cos^{45} \theta - \binom{45}{2} \cos^{43} \theta.\text{sen}^2 \theta + \dots + \binom{45}{44} \cos \theta.\text{sen}^{44} \theta$$

$$\text{sen } 45\theta = \binom{45}{1} \cos^{44} \theta.\text{sen} \theta - \binom{45}{3} \cos^{42} \theta.\text{sen}^3 \theta + \dots + \binom{45}{45} \text{sen}^{45} \theta$$

Assim:

$$\text{lg } 45\theta = \frac{\binom{45}{1} \cos^{44} \theta.\text{sen} \theta - \binom{45}{3} \cos^{42} \theta.\text{sen}^3 \theta + \dots + \binom{45}{45} \text{sen}^{45} \theta}{\binom{45}{0} \cos^{45} \theta - \binom{45}{2} \cos^{43} \theta.\text{sen}^2 \theta + \dots + \binom{45}{44} \cos \theta.\text{sen}^{44} \theta} \Rightarrow$$

$$\text{lg } 45\theta = \frac{\binom{45}{1} \text{tg} \theta - \binom{45}{3} \text{tg}^3 \theta + \dots + \binom{45}{45} \text{tg}^{45} \theta}{\binom{45}{0} - \binom{45}{2} \text{tg}^2 \theta + \dots + \binom{45}{44} \text{tg}^{44} \theta}$$

$$\text{fazendo } \text{tg } \theta = t \text{ segue que: } \text{tg } 45\theta = \frac{\binom{45}{1} t - \binom{45}{3} t^3 + \dots + \binom{45}{45} t^{45}}{\binom{45}{0} - \binom{45}{2} t^2 + \dots + \binom{45}{44} t^{44}}$$

$$\text{lg } 45\theta = 0 \Leftrightarrow \binom{45}{1} t^{45} - \binom{45}{3} t^{43} + \dots - \binom{45}{3} t^3 + \binom{45}{1} t = 0 \quad (1)$$

A equação (1) possui como raízes $t = 0, \pm \text{tg } 4^\circ, \pm \text{tg } 8^\circ, \dots, \pm \text{tg } 88^\circ$

$$\text{Dividindo (1) por } t \text{ obtém-se } \binom{45}{1} t^{44} - \binom{45}{3} t^{42} + \dots - \binom{45}{3} t^2 + \binom{45}{1} = 0 \quad (2)$$

Logo, as raízes da equação (2) são: $t = \pm \text{tg } 4^\circ, \pm \text{tg } 8^\circ, \dots, \pm \text{tg } 88^\circ$

$$\text{Fazendo } t^2 = x \text{ obtém-se } \binom{45}{1} x^{22} - \binom{45}{3} x^{21} + \dots - \binom{45}{3} x + \binom{45}{1} = 0 \quad (3)$$

Portanto, as raízes de (3) são $x = \text{tg}^2 4^\circ, \text{tg}^2 8^\circ, \dots, \text{tg}^2 88^\circ$

Deste modo, a soma das raízes de (3) vale:

$$\text{tg}^2 4^\circ + \text{tg}^2 8^\circ + \text{tg}^2 12^\circ + \dots + \text{tg}^2 88^\circ = \frac{\binom{45}{1}}{\binom{45}{1}} = 990$$

5) (IMO-77) Defini-se $f(x) = 1 - a.\cos x - b.\text{sen } x - A.\cos 2x - B.\text{sen } 2x$, onde a, b, A, B são constantes reais. Suponha que $f(x) \geq 0$ para todo x real. Prove que $a^2 + b^2 \leq 2$ e $A^2 + B^2 \leq 1$.

Solução:

$$a.\cos x + b.\text{sen } x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{sen } x \right)$$

Como $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ então existe um ângulo α tal que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ e } \operatorname{cos} \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Logo:

$$a \cdot \operatorname{cos} x + b \cdot \operatorname{sen} x = \sqrt{a^2+b^2} (\operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} \alpha) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \operatorname{sen}(x+\alpha),$$

onde $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (a/b)$

$$\text{Analogamente: } a \cdot \operatorname{cos} x + b \cdot \operatorname{sen} x = \sqrt{A^2+B^2} \cdot \operatorname{sen}(2x+\beta)$$

onde $\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (A/B)$

$$\text{Desta forma: } f(x) = 1 - \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x+\alpha) - \sqrt{A^2+B^2} \operatorname{sen}(2x+\beta) \geq 0$$

$$f(x+\pi) = 1 + \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x+\alpha) - \sqrt{A^2+B^2} \operatorname{sen}(2x+\beta) \geq 0$$

$$\text{Somando as duas inequações: } \sqrt{A^2+B^2} \operatorname{sen}(2x+\beta) \leq 1 \quad (1)$$

Como (1) é válida para todo x e em algum momento $\operatorname{sen}(2x+\beta) = 1$, segue que $A^2+B^2 \leq 1$

$$f(x+\pi/4) = 1 - \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x+\pi/4+\alpha) - \sqrt{A^2+B^2} \operatorname{sen}(2x+\pi/2+\beta) \Rightarrow$$

$$1 - \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x+\pi/4+\alpha) - \sqrt{A^2+B^2} \operatorname{cos}(2x+\beta) \geq 0$$

$$f(x-\pi/4) = 1 - \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x-\pi/4+\alpha) - \sqrt{A^2+B^2} \operatorname{sen}(2x-\pi/2+\beta) \Rightarrow$$

$$1 - \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x+\pi/4+\alpha) + \sqrt{A^2+B^2} \operatorname{cos}(2x+\beta) \geq 0$$

Somando as duas inequações:

$$\sqrt{a^2+b^2} [\operatorname{sen}(x+\alpha+\pi/4) + \operatorname{sen}(x+\alpha-\pi/4)] \leq 2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}(x+\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\pi/4) \leq 2 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x+\alpha) \leq \sqrt{2}$$

Como em algum momento tem-se $\operatorname{sen}(x+\alpha) = 1$: $a^2+b^2 \leq 2$

6.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) (Letônia-94) É dado que $\operatorname{cos} x = \operatorname{cos} y$ e $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} y$. Prove que $\operatorname{sen} 1994x + \operatorname{sen} 1994y = 0$.

2) (Báltica-95) Prove que $\operatorname{sen}^3 18^\circ + \operatorname{sen}^2 18^\circ = 1/8$.

3) (Canadá-75) Uma função $f(x)$ é periódica se existe um número positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo x . Por exemplo, $\operatorname{sen} x$ é periódica com período 2π . A função $\operatorname{sen}(x^2)$ é periódica? Prove sua resposta.

4) (J. I. R. MacKnight-79) Resolva:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{23}{36}\right).$$

5) (Polônia-96) Determine todos os inteiros positivos n , tais que a equação $2 \cdot \operatorname{sen} nx = \operatorname{tg} x + \cot x$ possui soluções nos números reais x .

6) (Espanha-85) Resolva a equação $\operatorname{tg}^2 2x + 2 \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 1$.

7) (IMO-59) Sejam a, b, c números reais. Dada a equação para $\cos x$:

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0,$$

forme uma equação quadrática em $\cos 2x$ cujas as raízes são os mesmos valores de x . Compare as equações em $\cos x$ e $\cos 2x$ para $a = 4, b = 2, c = -1$.

8) (Vietnã-82) Ache a, b, c inteiros tais que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são $\cos 72^\circ$ e $\cos 144^\circ$.

9) (Bélgica-2006) a) Encontre todos os números reais α tais que $\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha)$.

b) Determine inteiros a, b, c, d tais que $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}$, são soluções da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

10) Prove que x, y, z são números reais positivos tais que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1,$$

então existe um triângulo ABC tal que $x = \operatorname{sen}(A/2), y = \operatorname{sen}(B/2)$ e $z = \operatorname{sen}(C/2)$.

11) Demonstre que em um triângulo vale a relação:

$$\operatorname{cos} A + \operatorname{cos} B + \operatorname{cos} C = 1 + 4 \cdot \operatorname{sen}(A/2) \cdot \operatorname{sen}(B/2) \cdot \operatorname{sen}(C/2)$$

12) (Moldávia-2000) Determine o valor máximo do produto xy se os números reais x e y satisfazem a relação: $y(1+x^2) = x(\sqrt{1-4y^2}-1)$.

13) (USAMO-92) Prove que:

$$\frac{1}{\operatorname{cos} 0^\circ \operatorname{cos} 1^\circ} + \frac{1}{\operatorname{cos} 1^\circ \operatorname{cos} 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\operatorname{cos} 88^\circ \operatorname{cos} 89^\circ} = \frac{\operatorname{cos} 1^\circ}{\operatorname{sen}^2 1^\circ}$$

14) (USAMO-96) Prove que a média dos números $n \cdot \operatorname{sen} n^\circ$ ($n = 2, 4, 6, \dots, 180$) é igual a $\cot 1^\circ$.

15) (Rússia-83) Dois ângulos agudos a e b satisfazem a condição:
 $\sin^2 a + \sin^2 b = \sin(a + b)$. Prove que $a + b = \pi/2$.

16) (Putnam-2003) Determine o valor mínimo de:
 $|\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x|$
 para todos os números reais x .

17) (AIME-2006) Determine a soma de todos os x tais que
 $\cos^3 3x + \cos^3 5x = 8 \cos^3 4x \cos^3 x$
 onde x é um ângulo medido em graus e $100^\circ < x < 200^\circ$.

18) (IMO-63) Prove que $\cos \pi/7 - \cos 2\pi/7 + \cos 3\pi/7 = 1/2$.

19) (Romênia-2004) Sejam x, y e z números reais tais que
 $\cos x + \cos y + \cos z = 0$
 $\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0$
 Prove que $\cos 2x \cos 2y \cos 2z \leq 0$.

20) (Romênia-96) Mostre que
 $\cos^7 x + \cos^7 \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^7 \left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{63}{64} \cos 3x$,
 para todo $x \in \mathbb{R}$.

21) (IMO-89 Longlist) Dado que:
 $\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} = a$,
 mostre que $\cos(y+z) + \cos(z+x) + \cos(x+y) = a$.

6.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) (AMC12-99) E um triângulo ABC sabe-se que $3 \sin A + 4 \cos B = 6$ e $4 \sin B + 3 \cos A = 1$. Determine a medida do ângulo C.

2) (Bulgária-97) Determine todos os números reais x tais que $\operatorname{tg}(\pi/12 - x)$, $\operatorname{tg} \pi/12$ e $\operatorname{tg}(\pi/12 + x)$ formam (em alguma ordem) uma progressão geométrica.

3) Determine a soma de todos os x no intervalo $[0, 2\pi]$ tais que $3 \cot^2 x + 8 \cot x + 3 = 0$.

4) (AMC12-2002) Dado que $(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \dots (1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = 2^n$, determine n .

5) Calcule o valor de $\cos a \cos 2a \cos 3a \dots \cos 999a$, onde $a = \frac{2\pi}{1999}$.

6) Demonstre que se A, B e C são ângulos de um triângulo então:
 $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

7) (OBM-2001) Uma calculadora tem o número 1 na tela. Devemos efetuar 2001 operações, cada uma das quais consistindo em pressionar a tecla $\sin$ ou a tecla $\cos$. Essas operações calculam respectivamente o seno e o cosseno com argumentos em radianos. Qual é o maior resultado possível depois das 2001 operações?

8) Mostre que $\sec^4 \frac{\pi}{7} + \sec^4 \frac{2\pi}{7} + \sec^4 \frac{3\pi}{7} = 416$.

9) (Bélgica-95) Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $\alpha \in]0, \pi[$:

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\alpha) = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

10) (AIME-2013) Para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ tem-se:

$$P = \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{8} \cos 3\theta + \frac{1}{16} \sin 4\theta + \frac{1}{32} \cos 5\theta - \frac{1}{64} \sin 6\theta - \frac{1}{128} \cos 7\theta + \dots$$

e

$$Q = 1 - \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \sin 3\theta + \frac{1}{16} \cos 4\theta - \frac{1}{32} \sin 5\theta - \frac{1}{64} \cos 6\theta + \frac{1}{128} \sin 7\theta + \dots$$

tal que $\frac{P}{Q} = \frac{2\sqrt{2}}{7}$. Calcule $\sin \theta$.

11) (IMO-67 Longlist) Mostre que o triângulo cujos ângulos A, B e C satisfazem a igualdade $\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = 2$ é um triângulo retângulo.

12) (IMO-66) Prove que $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$ para todo número natural n e todo real x . (com $\sin 2^n x$ não nulo).

13) (AIME-2012) Sejam x e y números reais tais $\frac{\sin x}{\sin y} = 3$ e $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{2}$.

Calcule o valor de $\frac{\sin 2x}{\sin 2y} + \frac{\cos 2x}{\cos 2y}$.

14) (IMO-61) Resolva a equação $\cos^n x - \sin^n x = 1$, onde n é um número natural.

15) (AIME-2008) Determine o inteiro positivo n tal que:

$$\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} + \arcsin \frac{1}{5} + \arcsin \frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$$

16) (AIME-2008) Seja $a = \frac{\pi}{2008}$. Determine o menor inteiro positivo n tal que:

$2[\cos a \cdot \sin a + \cos 4a \cdot \sin 2a + \cos 9a \cdot \sin 3a + \dots + \cos n^2 a \cdot \sin na]$ é um inteiro.

17) (IMO-62) Determine todas as soluções reais para $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

18) (IMO-65) Determine todos os x no intervalo $[0, \pi]$ que satisfazem:

$$2 \cos x \leq \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \leq \sqrt{2}.$$

19) (IMO-69 Shortlist) Determine todos os números reais λ tais que a equação $\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)$:

a) não possua solução.

b) possua exatamente uma solução.

c) possua exatamente duas soluções.

d) possua mais que duas soluções no intervalo $(0, \pi/4)$.

20) (USA Talent Search) Determine todos os números reais x entre 0 e 2π tais que $\tan 7x - \sin 6x = \cos 4x - \cot 7x$.

21) (Pan African-2000) Resolva a equação trigonométrica:

$$\sin^3 x(1 + \cot x) + \cos^3 x(1 + \tan x) = \cos 2x$$

SOLUÇÕES
E
DÍDICAS

OPERAÇÕES ALGÉBRICAS

7.1. PARTE A

1)

De $\frac{17}{18} = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = 1 - 2(xy)^2$, obtemos $(xy)^2 = \frac{1}{36}$, e daí

$$\frac{1}{xy} = 6.$$

2)

a) Subtraindo as duas equações dadas temos $a^2 - b^2 = 6(b - a)$ ou seja

$(a - b)(a + b - 6) = 0$. Como $a \neq b$, temos $a + b = -6$.

b) Da parte a), elevando ao quadrado, $a^2 + b^2 + 2ab = 36$. Mas, somando as equações dadas, temos $a^2 + b^2 = 6(a + b) + 10ab = -36 + 10ab$.

Portanto, $-36 + 2ab + 10ab = 36$ o que dá $ab = 6$.

3)

Da fatoração de $a^5 - 1$ sabe-se que: $a^5 - 1 = (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

Multiplicando $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$ por $a - 1$ tem-se que

$$(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = 0 \Rightarrow a^5 - 1 = 0 \Rightarrow a^5 = 0$$

Assim:

$$a^{2000} + a^{2010} + 1 = (a^5)^{400} + (a^5)^{402} + 1 = (1)^{400} + (1)^{402} + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

4)

$$a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd \Rightarrow$$

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 = (c^2 + d^2 + cd)^2 \Rightarrow$$

$$a^4 + b^4 + a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2a^3b + 2ab^3 =$$

$$= c^4 + d^4 + c^2d^2 + 2c^2d^2 + 2c^3d + 2cd^3 \Rightarrow$$

$$2a^4 + 2b^4 + 2a^2b^2 + 4a^2b^2 + 4a^3b + 4ab^3 =$$

$$= 2c^4 + 2d^4 + 2c^2d^2 + 4c^2d^2 + 4c^3d + 4cd^3 \Rightarrow$$

$$a^4 + b^4 + [a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4] =$$

$$= c^4 + d^4 + [c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4] \Rightarrow$$

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$$

5)

$$\text{Temos } ab = a - b \Leftrightarrow b = \frac{a}{1+a}. \text{ Logo}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a}{\frac{a}{1+a}} + \frac{\frac{a}{1+a}}{a} - a \cdot \frac{a}{1+a} = 1 + a + \frac{1-a^2}{1+a} =$$

$$= 1 + a + \frac{(1-a)(1+a)}{1+a} = 1 + a + 1 - a = 2$$

Ou seja, o único possível valor de $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ é 2.

6)

a) Subtraindo as duas equações: $a^2 - b^2 = 7(b - a) \Rightarrow$

$$(a - b)(a + b) = -7(a - b)$$

Como $a \neq b \Rightarrow a + b = -7$

$$\text{i) } a^2 = 7(-7 - a) + 51 \Rightarrow a^2 = -7a + 2 \Rightarrow a^2 + 7a - 2 = 0$$

$$\text{ii) } b^2 = 7(-7 - b) + 51 \Rightarrow b^2 = -7b + 2 \Rightarrow b^2 + 7b - 2 = 0$$

Assim, a e b são as raízes da equação $x^2 + 7x - 2 = 0 \Rightarrow ab = -2$

b) Fazendo $x = \frac{1}{a-b}$, $y = \frac{1}{b-c}$ e $z = \frac{1}{c-a}$ então:

$$\frac{1}{x} = a - b, \frac{1}{y} = b - c \text{ e } \frac{1}{z} = c - a. \text{ Assim: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0.$$

Desenvolvendo esta última expressão obtemos $yz + zx + xy = 0$.

$$\text{Portanto: } \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = x^2 + y^2 + z^2 =$$

$$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2, \text{ ou seja:}$$

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2.$$

7)

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd =$$

$$= (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (c^4 - 2c^2d^2 + d^4) + (2a^2b^2 + 2c^2d^2 - 4abcd) =$$

$$= (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0$$

Como todo quadrado perfeito é maior ou igual a zero, a única possibilidade é:

$$\text{i) } a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$$

$$\text{ii) } c^2 = d^2 \Rightarrow c = d$$

$$\text{iii) } ab = cd \Rightarrow a = b = c = d$$

8)

Inicialmente, podemos observar que:

$$\frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} = 3 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} = 3 - \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right),$$

ou seja, obter o valor de $\alpha = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ é equivalente a obter o

$$\text{valor de } \beta = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}.$$

Como já sabemos que $\beta = 3 - \alpha$ basta agora conseguir outra relação entre α e β aproveitando a igualdade fornecida no enunciado a qual envolve

$$\gamma = \frac{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)}{(a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a)}$$

Após alguns testes, substituindo valores em a , b e c , somos levados a

$$\text{supor que } \alpha - \beta = -\gamma, \text{ isto é, } \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = -\frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{c-a}{c+a}.$$

Vamos demonstrar tal identidade:

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{(a-b)(b+c)(c+a) + (b-c)(a+b)(c+a) + (c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} (*)$$

Porém,

$$\text{1) } (a-b)(b+c)(c+a) = (a-b)(b-c+2c)(a-c+2c) =$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c) + 2c(a-b)(b-c+a-c+2c) =$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c) + 2c(a-b)(a+b)$$

$$\text{2) } (b-c)(a+b)(c+a) + (c-a)(a+b)(b+c) =$$

$$= (a+b)((b-c)(c+a) + (c-a)(b+c)) =$$

$$= (a+b)(bc+ba-c^2-ca+cb+c^2-ab-ac) =$$

$$= (a+b)(2bc-2ac) = -2c(a-b)(a+b)$$

$$\text{Logo, de 1 e 2: } (*) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

$$\text{Assim, } \alpha - \beta = -\frac{1}{11} \Leftrightarrow \alpha - (3 - \alpha) = -\frac{1}{11} \Leftrightarrow \alpha = \frac{16}{11}.$$

9)

$$a + b = c + d \Rightarrow (a + b)^3 = (c + d)^3 \Rightarrow$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \Rightarrow$$

$$3a^2b + 3ab^2 = 3c^2d + 3cd^2 \Rightarrow ab(a + b) = cd(c + d)$$

$$\text{1ª possibilidade: } a + b = 0 \text{ e } c + d = 0$$

Assim, tem-se que $a = -b$ e $c = -d$

Logo:

$$a^{2011} + b^{2011} = a^{2011} + (-a)^{2011} = a^{2011} - a^{2011} = 0$$

$$c^{2011} + d^{2011} = c^{2011} + (-c)^{2011} = c^{2011} - c^{2011} = 0$$

2ª possibilidade: $a + b \neq 0$ e $c + d \neq 0$

Assim, segue que $ab = cd$

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = (c + d)^2 - 4cd = (c - d)^2$$

$$i) \begin{cases} a - b = c - d \\ a + b = c + d \end{cases} \Rightarrow 2a = 2c \Rightarrow a = c \Rightarrow b = d \Rightarrow$$

$$a^{2011} + b^{2011} = c^{2011} + d^{2011}$$

$$ii) \begin{cases} a - b = d - c \\ a + b = c + d \end{cases} \Rightarrow 2a = 2d \Rightarrow a = d \Rightarrow b = c \Rightarrow$$

$$a^{2011} + b^{2011} = c^{2011} + d^{2011}$$

10)

$$S_4 = (r + s)S_3 - rsS_2 = (r + s) \cdot 5 - rs \cdot 2 = 5r + 5s - 2rs = 6$$

$$S_3 = (r + s)S_2 - rsS_1 = (r + s) \cdot 2 - rs \cdot 1 = 2r + 2s - rs = 5$$

Com isso, encontramos que $r + s = -4$ e $rs = -13$.

$$\text{Daí, } S_5 = (r + s)S_4 - rsS_3 = -24 + 65 = 41.$$

11)

1ª Solução:

Supondo $b \neq 0$ e $c \neq 0$:

$$ac = -bd \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{d}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{d^2}{c^2}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{1}{b^2}$$

$$c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow 1 + \frac{d^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}$$

$$\text{Como } \frac{a^2}{b^2} = \frac{d^2}{c^2} \text{ então } \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow b = \pm c \Rightarrow a = \mp d, \text{ ou seja, se } b = c$$

então $a = -d$ e se $b = -c$ tem-se $a = d$

Logo: $ac + bd = ac + (\pm c)(\mp a) = ac - ac = 0$

O caso em que $b = 0$ ou $c = 0$ é trivial e resultado $ac + bd = 0$.

2ª Solução:

$$0 = (ac + bd)(ad + bc) = a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd = \\ = cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2) = ab + cd$$

12)

$$a^2b + a^2c = 2010 \text{ e } b^2c + ab^2 = 2010$$

$$a^2b + a^2c = b^2c + ab^2 \Rightarrow c(a^2 - b^2) + ab(a - b) = 0 \Rightarrow$$

$$(a - b)[c(a + b) + ab] = 0 \Rightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$x = c^2(a + b) = c(ac + bc) = c(-ab) = -abc$$

$$a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 = 4020 \Rightarrow ab(a + b) + c(a^2 + b^2) = 4020 \Rightarrow$$

$$ab(a + b) + c[(a + b)^2 - 2ab] = 4020 \Rightarrow$$

$$(a + b)(ab + ac + bc) - 2abc = 4020 \Rightarrow 0 + 2x = 4020 \Rightarrow x = 2010$$

13)

Em primeiro lugar, veja que cada termo do produto é do tipo

$$\frac{(k+1)^4 + (k+1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1}. \text{ Além disso, podemos escrever}$$

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Assim, ficamos com

$$\frac{(k+1)^4 + (k+1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{[(k+1)^2 - (k+1) + 1][(k+1)^2 + (k+1) + 1]}{(k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)}.$$

Agora, veja que

$$(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1 \text{ e } k^2 - k + 1 = (k-1)^2 + (k-1) + 1.$$

$$\text{Logo, a última expressão fica: } \frac{(k+1)^4 + (k+1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 1}{(k-1)^2 + (k-1) + 1}.$$

Logo, o produto pedido é igual a:

$$\frac{2^2 + 2 + 1}{0^2 + 0 + 1} \cdot \frac{4^2 + 4 + 1}{2^2 + 2 + 1} \cdot \frac{6^2 + 6 + 1}{4^2 + 4 + 1} \cdots \frac{32^2 + 32 + 1}{30^2 + 30 + 1} = 32^2 + 32 + 1 = 1057.$$

14)

$$x + y = -z \Rightarrow (x + y)^3 = -z^3 \Rightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + z^3 = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y) = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\text{Analogamente, pode-se demonstrar que } \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}.$$

$$x^6 + y^6 + z^6 = (x^3)^2 + (y^3)^2 + (z^3)^2 = (x^3 + y^3 + z^3)^2 - 2x^3y^3 - 2x^3z^3 - 2y^3z^3 = \\ = 9x^2y^2z^2 - 2x^3y^3z^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) \Rightarrow$$

$$x^6 + y^6 + z^6 = 9x^2y^2z^2 - 2x^3y^3z^3 \frac{3}{xyz} = 9x^2y^2z^2 - 6x^2y^2z^2 = 3x^2y^2z^2$$

$$\text{Assim: } \frac{x^6 + y^6 + z^6}{x^3 + y^3 + z^3} = \frac{3x^2y^2z^2}{3xyz} = xyz.$$

15)

$$\left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} \right) \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} + \frac{x}{y-z} \left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y} \right) + \frac{y}{z-x} \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{x-y} \right) + \\ & + \frac{z}{x-y} \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} \right) = 0 \Rightarrow \\ & \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} + \frac{x(x-y+z-x) + y(x-y+y-z) + z(z-x+y-z)}{(y-z)(z-x)(x-y)} = 0 \Rightarrow \\ & \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} + \frac{-xy + xz + xy - yz - xz + yz}{(y-z)(z-x)(x-y)} = 0 \Rightarrow \\ & \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0 \end{aligned}$$

16)

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 & \Rightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Rightarrow ayz + bxz + cxy = 0 \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1 & \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} \right) = 1 \Rightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2(ayz + bxz + cxy)}{abc} & = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{aligned}$$

17)

$$\text{Se } x^2 + 1 = -x \text{ então } x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = (-1)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = -1$$

$$\left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = 1 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^3} = 1 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 2$$

$$\left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) = -2 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^2} + x^2 + \frac{1}{x^4} = -2 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = -1$$

$$\left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^4 + \frac{1}{x^4} \right) = 1 \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^4} + x^4 + \frac{1}{x^5} = 1 \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 2$$

$$\text{Generalizando, } x + \frac{1}{x} = -1, x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}} = -1 \text{ e } x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}} = 2 \text{ para } n \geq 1.$$

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^2 + \dots + \left(x^{27} + \frac{1}{x^{27}} \right)^2 =$$

$$= 1 + 1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 4 + \dots + 1 + 4 = 1 + 13 \cdot 1 + 13 \cdot 4 = 66$$

18)

$$x^2 - y = y^2 - z \Rightarrow x^2 - y^2 = y - z \Rightarrow (x - y)(x + y) = y - z \Rightarrow$$

$$x + y = \frac{y - z}{x - y}$$

$$x^2 - y = z^2 - x \Rightarrow x^2 - z^2 = y - x \Rightarrow (x - z)(x + z) = y - x \Rightarrow$$

$$x + z = \frac{y - x}{x - z}$$

$$y^2 - z = z^2 - x \Rightarrow y^2 - z^2 = z - x \Rightarrow (y - z)(y + z) = z - x \Rightarrow$$

$$y + z = \frac{z - x}{y - z}$$

$$(x + y)(y + z)(z + x) = \frac{(y - z)(z - x)(y - x)}{(x - y)(x - z)(y - z)} = 1$$

19)

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{z + x} &= - \left(\frac{x^2 + y^2}{z} + \frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} \right) = \\ &= \frac{-[(xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + xz(x^2 + z^2))]}{xyz} = \\ &= \frac{-x^3y - xy^3 - y^3z - yz^3 - x^3z - xz^3}{xyz} = \frac{-x^3(y + z) - y^3(x + z) - z^3(x + y)}{xyz} = \\ &= \frac{x^4 + y^4 + z^4}{xyz} = \frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \end{aligned}$$

20)

$$(ax + by + cz)^2 = 0 \Rightarrow a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz = 0$$

$$bc(y - z)^2 + ac(x - z)^2 + ab(x - y)^2 =$$

$$bcy^2 + bcx^2 - 2bcyz + acx^2 + acz^2 - 2acxz + abx^2 + aby^2 - 2abxy =$$

$$= bcy^2 + bcx^2 + acx^2 + acz^2 + abx^2 + aby^2 + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 =$$

$$(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2)$$

Logo:

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2} = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{(ax^2 + by^2 + cz^2)(a + b + c)} = \frac{1}{a + b + c}$$

21)

.

$$x^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{xyz(x+y+z)}{y^2} = x^2 + \frac{xz(x+y+z)}{y} = \frac{x^2y + xz(x+y+z)}{y} = \frac{x(y+z)(x+z)}{y}$$

$$\text{Analogamente: } y^2 + \frac{1}{z^2} = \frac{y(z+x)(y+x)}{z} \text{ e } z^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{z(x+y)(z+y)}{x}$$

Multiplicando estas expressões obtém-se

$$\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2.$$

22)

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) \Rightarrow \\ (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ \text{Assim, } (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \\ a &= -b \text{ ou } a = -c \text{ ou } b = -c \Leftrightarrow \\ a+b+c &= 0 \text{ ou } a+b+c = b \text{ ou } a+b+c = a \Leftrightarrow \\ \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} &= \sqrt[3]{a+b+c} \end{aligned}$$

23)

Vamos construir uma equação algébrica de 3º grau tal que suas raízes sejam a, b e c. Desde que $a+b+c=0$, a equação é dada por $x^3 + qx + r = 0$, q e r inteiros. Substituindo:

$$a^3 + qa + r = 0, \quad b^3 + qb + r = 0, \quad c^3 + qc + r = 0$$

Multiplicando cada equação por 2a, 2b e 2c, respectivamente, e somando obtemos:

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 + 2q(a^2 + b^2 + c^2) + 2r(a+b+c) = 0 \Rightarrow$$

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = -2q(a^2 + b^2 + c^2).$$

Pelas relações de Girard sabemos que:

$$a+b+c=0, \quad ab+bc+ac=-q, \quad abc=r$$

$$\text{Assim: } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab+bc+ac) = -2q$$

$$\text{Como } 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = -2q(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow$$

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = 4q^2 = (2q)^2.$$

24)

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^3 = -c^3 \Rightarrow$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a+b) \Rightarrow$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^5 = -c^5 \Rightarrow$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = -c^5 \Rightarrow$$

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5ab[a^3 + b^3 + 2ab(a+b)] = -5ab(-c^3 + 3abc - 2abc) = 5abc(c^2 - ab)$$

$$\text{Analogamente: } a^5 + b^5 + c^5 = 5abc(b^2 - ac) = 5abc(a^2 - ac)$$

Somando estas expressões:

$$3(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Como $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$ então:

$$3(3abc) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \Rightarrow$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc) = 18/5$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 0 \Rightarrow$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 18/5 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6/5$$

25)

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (-d)^3 = (a+b+c)^3 \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b+c)^3 - c^3 \Rightarrow \\ (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= (a+b+c-c)[(a+b+c)^2 + (a+b+c)c + c^2] \Rightarrow \\ (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= (a+b)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + ac + bc + c^2 + c^2) \Rightarrow \\ (a+b)(a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab + 3ac + 3bc) &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 0 \Rightarrow \\ (a+b)(3c^2 + 3ab + 3ac + 3bc) &= 0 \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = 0 \end{aligned}$$

26)

Da 1ª equação segue que $x+y=z-1$

$$(x-y)(x+y) = (1-z)(1+z) \Rightarrow (x-y)(z-1) + (z-1)(z+1) = 0 \Rightarrow$$

$$(z-1)(x-y+z+1) = 0$$

$$\text{i) } z=1 \Rightarrow x+y=0, \quad x^2 - y^2 = 0 \text{ e } -x^3 + y^3 = -2 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$$

$$y=-1 \Rightarrow (x, y, z) = (1, -1, 1)$$

$$\text{ii) } x-y+z=-1 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=z$$

$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1 \Rightarrow 1 + 2y^3 = -1 \Rightarrow y^3 = -1 \Rightarrow y=z=-1 \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (-1, -1, -1)$$

27)

Inicialmente deve-se observar que: $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1/2$

Elevando ao quadrado os dois membros da equação:

$$x + \sqrt{2x-1} + x - \sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} = A^2 \Rightarrow 2x + 2|x-1| = A^2$$

$$\text{i) } A = \sqrt{2} \Rightarrow x + |x-1| = 1$$

Se $1/2 \leq x \leq 1$: $x - x + 1 = 1$, que é uma identidade, ou seja, todo $x \in [1/2, 1]$ é raiz da equação.

Se $x > 1$: $x + x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1$, que é uma contradição por $x > 1$

$$\text{ii) } A = 1 \Rightarrow 2x + 2|x-1| = 1$$

Se $1/2 \leq x \leq 1$: $2x - 2x + 2 = 1 \Rightarrow$ contradição!!!

Se $x > 1$: $2x + 2x - 2 = 1 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = 3/4$, porém $x > 1$, ou seja, não existe solução para $A = 1$

iii) $A = 2 \Rightarrow x + |x - 1| = 2$

Se $1/2 \leq x \leq 1$: $x - x + 1 = 2 \Rightarrow$ contradição!!!

Se $x > 1$: $x + x - 1 = 2 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 3/2$

28)

$$2\sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - p} \Rightarrow 4x^2 - 4 = x^2 - 2x\sqrt{x^2 - p} + x^2 - p \Rightarrow$$

$$2x^2 + p - 4 = -2x\sqrt{x^2 - p} \Rightarrow 4x^4 + 4(p - 4)x^2 + (p - 4)^2 = 4x^4 - 4px^2 \Rightarrow$$

$$(8p - 16)x^2 = -(p - 4)^2 \Rightarrow x = \frac{|p - 4|}{2\sqrt{4 - 2p}}$$

Como $4 - 2p > 0$ tem-se que $p < 2 \Rightarrow |p - 4| = -(p - 4)$

Assim, a única solução é $x = \frac{4 - p}{2\sqrt{4 - 2p}}$

7.2. PARTE B

1) $x = 3$ ou $x = -8$. Dica: Eleve a quadrado duas vezes.

2) Dica: Prove que $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$

3) 364

4) u.s - p.t

5) Dica: No numerador tire em evidência a_1 e no denominador tire em evidência b_1 .

6) Dica. Lembre que $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$

7) 25/6

8) $x = 0, 1$ ou 2 . Dica: Analise a imagem de $\frac{2x + 4}{4 - x}$

9) Dica: Faça $x = a + 32b$ e $y = 3a - b$.

10) $x = y = z = 0$. Dica: Organize os números em quadrados perfeitos.

11) 2 ou 5/16. Dica: No 1º termo tire em evidência o número a , no numerador e denominador.

12) 36. Dica: Fatore cada expressão da forma $(a + 1)(b + 1)$.

13) a

14) - 3. Dica: Note que $x + y = -z$.

15) 373

16) e

17) Dica: Desenvolva $(a - c)(b - c)$ e depois substitua $ab + c^2 = a^2 + b^2$.

18) Dica: Agrupe os termos equidistantes dos extremos.

19) 16

20) - 2/9. Dica: Prove que $xy + z - 1 = (x - 1)(y - 1)$

21) $x = \pm 2/3$ e $y = \pm 1/3$. Dica: Organize em quadrados perfeitos.

22) Dica: Demonstre que $x + y + z = xy + xz + yz$.

23) ± 1

24) Dica: Veja o exemplo resolvido nº 6.

25) $w = a$ ou b ou c ou $\frac{abc}{ab + ac + bc}$

FUNÇÕES

8.1. PARTE A

1)

$$f(x) + f(x+3) = x^2 \Rightarrow f(x+3) + f(x+6) = (x+3)^2 \Rightarrow$$

$$f(x+6) - f(x) = (x+3)^2 - x^2 = 6x + 9$$

$$x = 19: f(25) - f(19) = 6 \cdot 19 + 9$$

$$x = 25: f(31) - f(25) = 6 \cdot 25 + 9$$

$$x = 31: f(37) - f(31) = 6 \cdot 31 + 9$$

...

$$x = 85: f(91) - f(85) = 6 \cdot 85 + 9$$

$$\text{Somando obtém-se: } f(91) - f(19) = 6(19 + 25 + 31 + \dots + 85) + 12 \cdot 9 \Rightarrow$$

$$f(91) = 94 + 3744 + 108 = 3946$$

$$f(91) + f(94) = 91^2 \Rightarrow f(94) = 8281 - 3946 = 4335$$

2)

$$\text{Façamos } x = a^u \text{ e } y = a^v \Rightarrow f(xy) = f(x) + f(y) \Rightarrow$$

$$f(a^u a^v) = f(a^u) + f(a^v) \Rightarrow f(a^{u+v}) = f(a^u) + f(a^v)$$

$$\text{Fazendo } g(u) = f(a^u) \Rightarrow g(u+v) = g(u) + g(v) \Rightarrow g(u) = c \cdot u \Rightarrow$$

$$f(x) = c \cdot \log_a x$$

3)

$$\text{Façamos } x = a^u \text{ e } y = a^v \Rightarrow f(a^{u+v}) = f(a^u)f(a^v)$$

$$\text{Fazendo } g(u) = f(a^u) \Rightarrow g(u+v) = g(u)g(v) \Rightarrow g(u) = a^{cu} \Rightarrow f(x) = x^c$$

4)

$$\text{Seja } f(0) = a \text{ e } y = 0 \Rightarrow f(x/2) = [f(x) + a]/2$$

$$\text{Então: } f(x) + f(y) = 2 \cdot f((x+y)/2) = 2 \cdot [f(x+y) + a]/2 \Rightarrow$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a \Rightarrow [f(x+y) - a] = [f(x) - a] + [f(y) - a]$$

$$\text{Fazendo } f(x) - a = g(x) \Rightarrow g(x+y) = g(x) + g(y) \Rightarrow g(x) = cx \Rightarrow$$

$$f(x) = cx + a$$

5)

$$x = 0 \text{ e } y = t \Rightarrow f(t) + f(-t) = 2f(0)\cos t$$

$$x = \pi/2 + t \text{ e } y = \pi/2 \Rightarrow f(t + \pi) + f(t) = 0$$

$$x = \pi/2 \text{ e } y = \pi/2 + t \Rightarrow f(t + \pi) + f(-t) = 2f(\pi/2)\cos(t + \pi/2) \Rightarrow$$

$$f(t + \pi) + f(-t) = -2f(\pi/2)\sin t$$

$$\text{Assim, temos que } f(t) + f(-t) + f(t + \pi) = f(0)\cos t - f(\pi/2)\sin t$$

$$\text{Deste modo: } f(t) = f(0)\cos t + f(\pi/2)\sin t$$

6)

$$\text{Dividindo a equação funcional por } xy \text{ temos: } f(xy)/xy = f(y)/y + f(x)/x$$

$$\text{Fazendo } g(x) = f(x)/x \Rightarrow g(xy) = g(x) + g(y)$$

$$\text{Fazendo } x = a^u \text{ e } y = a^v \Rightarrow g(a^{u+v}) = g(a^u) + g(a^v)$$

$$\text{Assim, fazendo } g(a^u) = h(u) \Rightarrow h(u+v) = h(u) + h(v) \Rightarrow h(u) = c \cdot u$$

$$\text{Logo: } g(x) = c \cdot \log_a x \Rightarrow f(x) = c \cdot x \cdot \log_a x$$

7)

$$y = 0 \Rightarrow 2f(x) = 2f(x) + 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$x = y \Rightarrow f(2x) + f(0) = 4f(x) \Rightarrow f(2x) = 4f(x)$$

$$x \rightarrow 2x \quad y \rightarrow x \Rightarrow f(3x) + f(x) = 2f(2x) + 2f(x) \Rightarrow f(3x) = 9f(x)$$

$$x \rightarrow 3x \quad y \rightarrow x \Rightarrow f(4x) + f(2x) = 2f(3x) + 2f(x) \Rightarrow f(4x) = 16f(x)$$

$$\text{Por indução podemos provar que } f(nx) = n^2 f(x), \text{ para todo } x \text{ real}$$

$$\text{Seja } x \text{ um número racional, ou seja, } x = p/q.$$

$$qx = p \cdot 1 \Rightarrow f(q \cdot x) = f(p \cdot 1) = p^2 f(1) \Rightarrow f(p) = p^2 f(1) \Rightarrow f(x) = ax^2 \text{ para}$$

$$\text{todo } x \text{ racional}$$

Suponhamos que $f(x)$ seja contínua. Se x for irracional, podemos sempre escolher um racional x_n com período infinito e cujo limite tende para x . Então pela continuidade da função temos que $f(x) = ax^2$ para todo x real

8)

$$\text{Trocando } x \text{ por } y \text{ na equação temos que } f(x-y) = f(y-x) \Rightarrow$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$x = y \Rightarrow f(0) = f^2(x) + g^2(x) \text{ e fazendo } x = 0 \Rightarrow f(0) = f^2(0) + g^2(0)$$

$$y = 0 \Rightarrow f(x) = f(x)f(0) + g(x)g(0)$$

$$\text{Se } f(0) = 0 \text{ temos que } g(0) = 0 \text{ e } f(x) = 0$$

$$\text{Se } f(0) \neq 0 \text{ temos que } f(x)[1 - f(0)] = g(x)g(0)$$

$$\text{Suponhamos que } f(0) \neq 1 \text{ e } g(0) \neq 0, \text{ então } g(x) = f(x)[1 - f(0)]/g(0)$$

$$\text{Assim, } f(0) = f^2(x) + f^2(x)[1 - f(0)]^2/g^2(0) \Rightarrow$$

$$f(0) = f^2(x)[g^2(0) + f^2(0) - 2f(0) + 1]/g^2(0) \Rightarrow$$

$$f(0)g^2(0) = f^2(x)[1 - f(0)] \Rightarrow f(x) = g(0)[f(0)/(1 - f(0))]^{1/2} \Rightarrow$$

$$g(x) = [f(0)(1 - f(0))]^{1/2}$$

$$\text{Se } f(0) = 1 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1$$

$$y \rightarrow -x \Rightarrow f(2x) = f^2(x) + g(x)g(-x) \Rightarrow f(x) = \cos x \text{ e } g(x) = \sin x$$

9)

A equação funcional lembra a propriedade

$$(x+y)^3/3 = x^3/3 + y^3/3 + xy(x+y)$$

Assim, a função $f(x) = x^3/3$ satisfaz o enunciado

$$\text{Fazendo } g(x) = f(x) - x^3/3 \Rightarrow g(x+y) = g(x) + g(y) \Rightarrow g(x) = cx$$

$$\text{Assim, temos a função } f(x) = x^3/3 + cx$$

10)

$$y = 0 \Rightarrow f(x - f(0)) = 1 - x$$

$$x \rightarrow x + f(0) \Rightarrow f(x) = 1 - f(0) - x$$

$$\text{Assim, } f(x - f(y)) = f(x - 1 + f(0) + y) = 1 - f(0) - x + 1 - f(0) - y \Rightarrow$$

$$1 - x - y = 2 - 2f(0) - x - y \Rightarrow$$

$$f(0) = 1/2 \Rightarrow f(x) = 1/2 - x$$

11)

a) Observe inicialmente que $4n + 9 = 2(2n + 3) + 3$.Perceba agora que: $25 = 2 \cdot 11 + 3$ e $11 = 2 \cdot 4 + 3$.

$$k = 2 \text{ em ii)} \Rightarrow f(4) = 8 + 3 = 11.$$

$$n = 4 \text{ em i)} \Rightarrow f(f(4)) = 16 + 9 = 25 \Rightarrow f(11) = 25.$$

$$n = 11 \text{ em i)} \Rightarrow f(f(11)) = 44 + 9 = 53 \Rightarrow f(25) = 53.$$

b) Continuando com o mesmo raciocínio:

$$1789 = 2 \cdot 893 + 3 \quad 893 = 2 \cdot 445 + 3 \quad 445 = 2 \cdot 221 + 3$$

$$221 = 2 \cdot 109 + 3 \quad 109 = 2 \cdot 53 + 3 \quad 53 = 2 \cdot 25 + 3$$

$$n = 25 \text{ em i)} \Rightarrow f(f(25)) = 109 \Rightarrow f(53) = 109$$

$$n = 53 \text{ em i)} \Rightarrow f(f(53)) = 221 \Rightarrow f(109) = 221$$

$$n = 109 \text{ em i)} \Rightarrow f(f(109)) = 445 \Rightarrow f(221) = 445$$

$$n = 221 \text{ em i)} \Rightarrow f(f(221)) = 893 \Rightarrow f(445) = 893$$

$$n = 445 \text{ em i)} \Rightarrow f(f(445)) = 1789 \Rightarrow f(893) = 1789$$

$$n = 893 \text{ em i)} \Rightarrow f(f(893)) = 3581 \Rightarrow f(1789) = 3581$$

12)

Aplicando $x = 1$ obtemos $f(f(y)) = y^q$ Aplicando $y = 1$ e fazendo $f(1) = k$, onde k é um número positivo, obtemos

$$f(kx) = x^p$$

Aplicando f no segundo resultado: $f(f(kx)) = (kx)^q = k^q x^q$

$$f(kx) = x^p \Rightarrow f(f(kx)) = f(x^p) = f(k \cdot (k^{-1} \cdot x^p)) = (k^{-1} \cdot x^p)^p = k^{-p} x^{p^2}$$

Igualando as duas expressões: $k^q x^q = k^{-p} x^{p^2}$ para todo x positivo.Deve-se então, necessariamente, ter $q = p^2$ e $k = 1$.

13)

Suponhamos que $f(1) = b$. Então, $f(1 + b) = 2b$, como f é estritamente crescente, temos:

$$b = f(1) < f(1 + 1) < \dots < f(1 + b) = 2b = b + b.$$

e resulta que $f(1), f(2), \dots, f(1 + b)$ são $b + 1$ naturais, distintos, o primeiro vale b e o último $2b$, portanto devem ser consecutivos. Então:

$$f(1) = b, f(2) = 1 + b, f(3) = 2 + b, \dots, f(1 + b) = b + b.$$

Em geral, para $n > 1$, se $f(n) = c$, $f(n + c) = 2c = c + c$ e resulta que: $c = f(n) < f(n + 1) < \dots < f(n + c) = c + c$ e os números $f(n), f(n + 1), \dots, f(n + c)$ são consecutivos.Assim, $f(n) = n - 1 + f(1)$

14)

Notemos que $f(f(f(x))) = f(x + 1) = f(x) + 1 \Rightarrow f(x + 1) - f(x) = 1, x \in \mathbb{Z}$

$$\text{Assim: } f(1) - f(0) = 1$$

$$f(2) - f(1) = 1$$

$$f(3) - f(2) = 1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f(x) - f(x - 1) = 1$$

Deste modo, $f(x) = x + f(0) \Rightarrow f(f(x)) = x + 2f(0)$ Como $f(f(x)) = x + 1 \Rightarrow 2f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = 1/2$, contrariando o fato de que $f(x)$ somente apresenta valores inteiros.

15)

$$\text{Fazendo } x = y = 0 \Rightarrow 2f(0) = 4f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$\text{Fazendo } y = nx \Rightarrow f((n + 1)x) = 2f(x) + 2f(nx) - f((n - 1)x)$$

$$n = 1 \Rightarrow f(2x) = 2f(x) + 2f(x) - f(0) \Rightarrow f(2x) = 4f(x)$$

$$n = 2 \Rightarrow f(3x) = 2f(x) + 2f(2x) - f(x) = 2f(x) + 8f(x) - f(x) \Rightarrow$$

$$f(3x) = 9f(x)$$

$$n = 3 \Rightarrow f(4x) = 2f(x) + 2f(3x) - f(2x) = 2f(x) + 18f(x) - 4f(x) \Rightarrow$$

$$f(4x) = 16f(x)$$

Pode-se conjecturar que $f(nx) = n^2 f(x)$.

$$\text{Por indução: } f((n + 1)x) = 2f(x) + 2f(nx) - f((n - 1)x) =$$

$$= f(x)[2 + 2n^2 - (n - 1)^2] = f(x)[n^2 + 2n + 1] \Rightarrow f((n + 1)x) = (n + 1)^2 f(x)$$

Assim, temos que $f(nx) = n^2 f(x)$.

$$\text{Para } x = 1/q \Rightarrow f(1) = f(qx) = q^2 f(x) \Rightarrow f(1/q) = f(1)/q^2$$

Analogamente, $f(p/q) = p^2 f(1/q) = (p/q)^2 f(1) \Rightarrow f(x) = ax^2$ para todo número racional x .

16)

1ª Solução:

Notemos que $1985 = 5 \cdot 397$

$$f(10) = f(2) + f(5) = 0 \Rightarrow f(2) = f(5) = 0$$

$$f(1985) = f(5) + f(397) = f(397)$$

$$\text{Como } 9 \cdot 397 = 3573 \text{ e } f(3573) = f(9) + f(397) = 0 \Rightarrow$$

$$f(9) = f(397) = 0 \Rightarrow f(1985) = 0$$

2ª Solução:

É possível demonstrar que $f(n) = 0$ para todo n natural

$$f(10) = f(2) + f(5) = 0 \Rightarrow f(2) = f(5) = 0$$

Todo número natural pode ser escrito da forma $2^a \cdot 5^b \cdot m$, onde m é um número cujo último dígito (unidades) é igual a 1, 3, 7 ou 9.

Como $f(n) = af(2) + bf(5) + f(m) \Rightarrow f(n) = f(m)$, onde basta provar que $f(m) = 0$

Se o dígito das unidades de m for igual a 1, então o de $3m$ é igual a 3:

$$f(3m) = f(3) + f(m) = 0 \Rightarrow f(3) = f(m) = 0$$

Se o dígito das unidades de m for igual a 3 $\Rightarrow f(m) = 0$

Se o dígito das unidades de m for igual a 7, então o de $9m$ é igual a 3:

$$f(9m) = 2f(3) + f(m) = 0 \Rightarrow f(m) = 0$$

Se o dígito das unidades de m for igual a 9, então o de $27m$ é igual a 3.

$$f(27m) = 3f(3) + f(m) = 0 \Rightarrow f(m) = 0$$

Assim, $f(n) = 0$ para todo n natural

17)

Fazendo $x = y$ temos $f(2x) \cdot f(0) = 2x + 1$

Logo, para $x = 0$, $(f(0))^2 = 1 \Leftrightarrow f(0) = +1$

Assim, $f(2x) = +(2x + 1)$ e, portanto, $f(x) = x + 1$ ou $f(x) = -(x + 1)$.

Substituindo as funções encontradas na equação funcional original, verificamos que apenas $f(x) = x + 1$ satisfaz as condições do problema.

18)

$$x = y = 0 \Rightarrow f(0) = f(0) + 2f^2(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$x = 0 \quad y = 1 \Rightarrow f(1) = f(0) + 2f^2(1) \Rightarrow 2f^2(1) - f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 1/2$$

$$y = 1 \Rightarrow f(x + 1) = f(x) + 1/2$$

$$\text{Assim, } f(n) = f(0) + n/2 \Rightarrow f(n) = n/2 \Rightarrow f(1996) = 998$$

19)

Se $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x) + f(y - x) \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow f$ é crescente.

Vamos provar por indução que $f(2^{-k}) \leq 2^{-k}$.

Inicialmente note que para $k = 0 \Rightarrow f(1) = 1$.

Para $k + 1$ temos:

$$f(2^{-(k+1)}) = f(2^{-(k+2)} + f(2^{-(k+2)})) \leq 2^{-(k+2)} + 2^{-(k+2)} = 2^{-(k+1)}$$

Seja x tal que $2^{-k} < x < 2^{-(k-1)}$. Assim: $f(x) \leq f(2^{-(k-1)}) \leq 2^{-(k-1)} < 2x$.

Desde que $f(0) + f(1) \leq f(1) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \leq 2x$.

20)

$$x = 1 \Rightarrow f(1) - f^2(1) - 1/4 \geq 0 \Rightarrow (f(1) - 1/2)^2 \leq 0 \Rightarrow f(1) = 1/2$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) - f^2(0) - 1/4 \geq 0 \Rightarrow (f(0) - 1/2)^2 \leq 0 \Rightarrow f(0) = 1/2$$

Como $f(1) = f(0)$ não existe uma função injetora que satisfaça o enunciado

21)

Fazendo $y = 0$ e $x \rightarrow x - g(0)$: $f(x) = 2[x - g(0)] + 0 + 5 \Rightarrow$

$$f(x) = 2x - 2g(0) + 5$$

$$f(x + g(y)) = 2(x + g(y)) - 2g(0) + 5 = 2x + y + 5 \Rightarrow$$

$$2x + 2g(y) - 2g(0) + 5 = 2x + y + 5 \Rightarrow g(y) = y/2 + g(0)$$

$$\text{Logo: } g(x + f(y)) = [x + f(y)]/2 + g(0) = [x + 2y - 2g(0) + 5]/2 + g(0) = x/2 + y + 5/2$$

22)

Inicialmente notemos que $f(x) = 0$ satisfaz o enunciado

$$y = 1 \Rightarrow f(x) \cdot f(1) - f(x) = x + 1$$

$$x = y = 1 \Rightarrow f^2(1) - f(1) = 2 \Rightarrow f^2(1) - f(1) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$[f(1) - 2][f(1) + 1] = 0 \Rightarrow f(1) = 2 \text{ ou } f(1) = -1$$

$$x = y = 0 \Rightarrow f^2(0) - f(0) = 0 \Rightarrow f^2(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 1 \text{ ou } f(0) = 0$$

$$x = 1 \text{ e } y = 0 \Rightarrow f(1) \cdot f(0) - f(0) = 1 \Rightarrow f(0) \cdot [f(1) - 1] = 1 \Rightarrow f(0) \neq 0$$

$$(\text{ou seja, } f(0) = 1) \Rightarrow f(1) = 2$$

$$\text{Assim: } 2 \cdot f(x) - f(x) = x + 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$$

23)

$$m = n \Rightarrow f(2f(n)) = 2n \Rightarrow f(2f(1)) = 2$$

$$\text{Seja } f(1) = 1 + s \Rightarrow f(2f(s)) = 2s \Rightarrow$$

$$f(s) + 2f(1) = f[f(2f(s)) + f(2f(1))] = f(2s + 2) = f(2f(1)) = 2$$

Assim temos que $f(s) + f(1) = 1$, que é impossível pois $f(n) \geq 1$.

Desta forma $f(1) = 1$

Suponhamos que $f(k) = k$

$$\text{Logo: } f(k + 1) = f(f(k) + f(1)) = k + 1$$

$$\text{Assim, por indução provamos que } f(n) = n \Rightarrow f(1997) = 1997$$

24)

Façamos $\sqrt{3} = a$, ou seja, $a^2 = 3$.

Aplicando $x - 1$ na equação funcional temos:

$$f(x) + f(x - 2) = af(x - 1) \quad (1)$$

Aplicando $x + 1$ na equação funcional temos:

$$f(x + 2) + f(x) = af(x + 1) \quad (2)$$

Aplicando $x - 2$ na equação funcional temos:

$$f(x - 1) + f(x - 3) = af(x - 2) \quad (3)$$

Aplicando $x + 2$ na equação funcional temos:

$$f(x + 3) + f(x + 1) = af(x + 2) \quad (4)$$

Assim, aplicando (2) na equação funcional:

$$f(x + 1) + f(x - 1) = af(x) = a^2 f(x - 1) - af(x - 2) \quad (5)$$

Aplicando (3) em (5) temos:

$$f(x + 1) + f(x - 1) = 3f(x - 1) - f(x - 1) - f(x - 3) \Rightarrow$$

$$f(x + 1) + f(x - 3) = f(x - 1) \quad (6)$$

$$\text{Aplicando } x + 2 \text{ em (6): } f(x + 3) + f(x - 1) = f(x + 1) \quad (7)$$

$$\text{Somando (6) e (7), temos que } f(x + 3) = -f(x - 3) \Rightarrow$$

$$f(x) = -f(x-6) \Rightarrow f(x) = -f(x+6)$$

$$\text{Deste modo } f(x+6) = f(x-6) \Rightarrow f(x) = f(x+12) \Rightarrow p = 12$$

25)

$$\text{Se } f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Rightarrow f(f(a)) - f(a) = f(f(b)) - f(b) \Rightarrow$$

$$a = b \Rightarrow f \text{ é injetora}$$

$$x = y = 0 \Rightarrow f(f(0)) = f(0) + 0 = f(0)$$

$$\text{Como } f \text{ é injetora então } f(0) = 0 \Rightarrow f(f(0)) = 0$$

$$\text{Se existe } b \neq 0 \text{ tal que } f(f(b)) = 0 = f(f(0)) \Rightarrow f(b) = f(0) \Rightarrow b = 0$$

26)

$$\text{Fazendo } m = n \Rightarrow f(2m) + f(0) - 1 = f(2m) \Rightarrow f(0) = 1$$

$$\text{Fazendo } n = 0 \Rightarrow 2f(m) - m - 1 = [f(2m) + 1]/2 \Rightarrow$$

$$f(2m) = 4f(m) - 2m - 3, \text{ para todo } m \text{ inteiro não-negativo.}$$

$$\text{Portanto: } f(m+n) + f(m-n) - m + n - 1 =$$

$$= [4f(m) - 2m - 3 + 4f(n) - 2n - 3]/2 \Rightarrow$$

$$f(m+n) + f(m-n) - m + n - 1 = 2f(m) + 2f(n) - m - n - 3 \Rightarrow$$

$$f(m+n) + f(m-n) + 2n + 2 = 2f(m) + 2f(n)$$

$$\text{Fazendo } n = 1 \Rightarrow f(m+1) + f(m-1) + 2 \cdot 1 + 2 = 2f(m) + 2f(1) \Rightarrow$$

$$f(m+1) + f(m-1) + 4 = 2f(m) + 6 \Rightarrow$$

$$f(m+1) - f(m) = f(m) - f(m-1) + 2$$

Assim:

$$f(m+1) - f(m) = f(m) - f(m-1) + 2 = f(m-1) - f(m-2) + 4 =$$

$$= f(m-2) + f(m-3) + 6 = \dots = f(1) - f(0) + 2m \Rightarrow$$

$$f(m+1) - f(m) = 2m + 2$$

Desta forma:

$$m = 0 \Rightarrow f(1) - f(0) = 2 \cdot 0 + 2$$

$$m = 1 \Rightarrow f(2) - f(1) = 2 \cdot 1 + 2$$

$$m = 2 \Rightarrow f(3) - f(2) = 2 \cdot 2 + 2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f(m) - f(m-1) = 2 \cdot (m-1) + 2$$

Somando todas estas equações obtemos:

$$f(m) - f(0) = 2(0 + 1 + 2 + \dots + m-1) + 2m \Rightarrow$$

$$f(m) - 1 = m(m-1) + 2m \Rightarrow f(m) = m^2 - m + 2m + 1 \Rightarrow$$

$$f(m) = m^2 + m + 1$$

$$\text{Aplicando esta função em } f(m+n) + f(m-n) - m + n - 1 =$$

$$= [f(2m) + f(2n)]/2 \text{ concluímos que } f(m) = m^2 + m + 1 \text{ satisfaz o enunciado.}$$

27)

$$x = y = 0: f(0) = 0$$

$$y = -1: f(x) = -f(-x)$$

$$y = 1: f(2x+1) = 2f(x) + f(1) \quad (1)$$

$$x = u + v + uv \text{ em (1): } f(2(u+v+uv)+1) = 2f(u+v+uv) + f(1) =$$

$$= 2f(uv) + 2f(u) + 2f(v) + f(1)$$

$$x = u \text{ e } y = 2v + 1: f(2(u+v+uv)+1) = f(u + (2v+1) + u(2v+1)) =$$

$$= f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv+u)$$

$$\text{Assim: } 2f(uv) + 2f(u) + 2f(v) + f(1) = f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv+u) \Rightarrow$$

$$f(2uv+u) = 2f(uv) + f(u)$$

$$\text{Fazendo } v = -1/2: 0 = 2f(-u/2) + f(u) = -2f(u/2) + f(u) \Rightarrow$$

$$f(u) = 2f(u/2) \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$$

$$\text{Portanto: } f(2uv+u) = f(2uv) + f(u)$$

$$\text{Fazendo } u = y \text{ e } x = 2uv: f(x) + f(y) = f(x+y)$$

28)

Considere a sequência x_n definida de modo que $x_n = f(x_{n-1})$, onde $x_0 \geq 0$ é um número real fixado.

Assim, a equação funcional fica da forma: $x_{n+2} = -ax_{n+1} + b(a+b)x_n$

A equação característica desta recorrência é $x^2 + ax - b(a+b) = 0$, cujas raízes são b e $-a-b$.

Desta forma, o termo geral da sequência é $x_n = \lambda_1 b^n + \lambda_2(-a-b)^n$, onde $A, B \in \mathbb{R}$ satisfazendo $x_0 = \lambda_1 + \lambda_2$ e $x_1 = \lambda_1 b - \lambda_2(a+b)$.

Desde que $x_n \geq 0$ para todo x deve-se ter $\lambda_2 = 0$: $f(x_0) = x_1 = \lambda_1 b = bx_0$

Como x_0 é um número real qualquer conclui-se que $f(x) = bx$.

29)

$$\text{Fazendo } x = y = 0: f(f(0))^2 = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 2 \text{ ou } f(0) = 0$$

$$\text{Suponha que } f(0) = 2$$

$$\text{Fazendo } y = 0 \text{ tem-se que } f(x) = 2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suponha agora que } f(0) = 0.$$

$$\text{Sendo } f(1) = a, \text{ fazendo } x = 1 \text{ e } y = -1: af(-1) = a + 2f(-1) \Rightarrow$$

$$f(-1) = a/(a-2)$$

$$\text{Fazendo } x \rightarrow x-1 \text{ e } y = 1: f(x) + (a-2)f(x-1) = a \quad (1)$$

$$\text{Fazendo } x \rightarrow -x \text{ e } y = -1: f(-x) + \frac{2}{a-2}f(-x+1) - f(x-1) = \frac{a}{a-2} \quad (2)$$

$$\text{Fazendo } x \rightarrow -x \text{ e } y = 1: f(-x+1) + (a-2)f(-x) = a \quad (3)$$

Eliminando $f(x-1)$ e $f(-x+1)$ em (1), (2) e (3):

$$f(x) - (a-2)f(-x) = 0 \quad (4)$$

$$\text{Fazendo } x \rightarrow -x \text{ em (4): } f(-x) - (a-2)f(x) = 0 \quad (5)$$

$$\text{Eliminando } f(-x) \text{ em (4) e (5): } f(x) = (a-2)^2 f(x)$$

Se $a \neq 1$ e $a \neq 3$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Se $a = 3$, então por (1): $f(x) = 3 - f(x-1)$

$$\text{Assim: } f(2) = 3 - f(1) = 0 \text{ e } f(5/2) = 3 - f(3/2) = f(1/2)$$

Fazendo $x = 2$ e $y = 1/2$ na equação funcional original:

$f(5/2) = f(1/2) + f(1) = f(1/2) + 3$, uma contradição
Logo, conclui-se que $a = 1$: $f(x) = f(x-1) + 1 \Rightarrow f(x) = x$

30)

$x = 0$: $f(f(y)) = y$
 $x^2 + y = f(xf(x) + f(y)) = f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = f(x)^2 + y \Rightarrow f(x)^2 = x^2 \Rightarrow$
 $f(x) = x$ ou $f(-x) = -x$
Substituindo na equação funcional verifica-se que ambas satisfazem

31)

Aplicando $x = y$ em ii), temos que: $f(x.f(x)) = x^2.f(x^2)$ (1)
Aplicando $y = 1$ em ii), temos que: $f(f(x)) = x^2.f(x) \Rightarrow$
 $f(f(x^2)) = x^4.f(x^2)$ (2)
Aplicando $y = f(x)$ em ii), temos que:
 $f(f(x).f(x)) = x^2.f(x.f(x)) = x^4.f(x^2)$ (3)
De (2) e (3) temos: $f(f(x^2)) = f([f(x)]^2) \Rightarrow$
 $f(x^2) = [f(x)]^2$ pois de i) f é injetora
Se $f(x) < x^2 \Rightarrow f(f(x)) < f(x^2) = [f(x)]^2 \Rightarrow x^2.f(x) < [f(x)]^2 \Rightarrow$
 $x^2 < f(x)$ que é um absurdo
Se $f(x) > x^2 \Rightarrow f(f(x)) > f(x^2) = [f(x)]^2 \Rightarrow x^2.f(x) > [f(x)]^2 \Rightarrow$
 $x^2 > f(x)$ que é um absurdo
Assim, $f(x) = x^2, x \in \mathbb{N}^*$

32)

Aplicando $\frac{1-x}{1+x}$ no funcional: $\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right]^2 . f(x) = 64 . \frac{1-x}{1+x}$

Como $[f(x)]^4 . \left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right]^2 = (64x)^2$ podemos dividir esta equação pela anterior:

$$[f(x)]^3 = \frac{(64x)^2}{64 \cdot \frac{1-x}{1+x}} = \frac{64x^2(1+x)}{1-x} \Rightarrow f(x) = 4\sqrt[3]{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}$$

33)

Desenvolvendo a expressão:
 $f^2(n+1) - 2f(n+1) + 1 + [f(n) - 1]^2 - 2f(n).f(n+1) - 4 = 0 \Rightarrow$
 $f^2(n+1) - 2f(n+1)[f(n) + 1] + [f(n) - 1]^2 - 3 = 0$
Resolvendo esta equação de segundo grau em $f(n+1)$ obtemos:
 $f(n+1) = f(n) + 1 \pm \sqrt{4f(n) + 3}$
Como tomamos o maior valor possível para f , segue que:

$f(n+1) = f(n) + 1 + \sqrt{4f(n) + 3}$
Sendo $g(n) = \sqrt{4f(n) + 3} \Rightarrow g^2(n) = 4f(n) + 3 \Rightarrow$
 $g^2(n+1) = 4f(n+1) + 3 \Rightarrow$
 $g^2(n+1) - g^2(n) = 4[f(n+1) - f(n)] = 4[1 + g(n)]$
Deste modo: $g^2(n+1) = g^2(n) + 4g(n) + 4 = [g(n) + 2]^2 \Rightarrow$
 $g(n+1) = g(n) + 2$
Assim: $g(1) = g(0) + 2$
 $g(2) = g(1) + 2$
 $g(3) = g(2) + 2$
.....
 $g(n) = g(n-1) + 2$
Ou seja: $g(n) = 2n + g(0)$
Como $g(n) = \sqrt{4f(n) + 3}$ e $f(0) = 2 \Rightarrow g(0) = \sqrt{11}$
Então: $g(n) = 2n + \sqrt{11} \Rightarrow f(n) = [g^2(n) - 3]/4 \Rightarrow$
 $f(n) = [(2n + \sqrt{11})^2 - 3]/4$

34)

$y = 0 \Rightarrow f(f(x)) = [1 + f(0)]f(x)$ (1)
 $x \rightarrow x + y$ em (1) $\Rightarrow [1 + f(0)]f(x + y) = f(f(x + y)) =$
 $= f(x + y) + f(x)f(y) - xy \Rightarrow$
 $f(0)f(x + y) = f(x)f(y) - xy$ (2)
 $y = 1$ em (2) $\Rightarrow f(0)f(x + 1) = f(x)f(1) - x \Rightarrow$
 $f(x + 1) = [f(x)f(1) - x]/f(0)$ (3)
 $y = -1$ $x \rightarrow x + 1$ em (2) $\Rightarrow f(0)f(x) = f(x + 1)f(-1) + x + 1 \Rightarrow$
 $f(x + 1) = [f(x)f(0) - x - 1]f(-1)$ (4)
Comparando as equações (3) e (4):
 $[f(x)f(1) - x]/f(0) = [f(x)f(0) - x - 1]f(-1) \Rightarrow$
 $f(x)f(1)f(-1) - f(-1)x = f(x)f^2(0) - f(0)x - f(0) \Rightarrow$
 $f(x)[f^2(0) - f(1)f(-1)] = [f(0) - f(-1)]x + f(0)$
Se $f^2(0) - f(1)f(-1) \neq 0$ temos que $f(x)$ é uma função linear $\Rightarrow$
 $f(x) = Ax + B$
Se $f^2(0) - f(1)f(-1) = 0$, então fazendo $x = 0$ temos que $f(0) = 0$
Neste caso, aplicando $f(0) = 0$ na equação (3) $\Rightarrow f(x)f(y) = xy \Rightarrow$
 $f(x)f(1) = x \Rightarrow f(x) = Ax$

35)

Seja x um número real positivo. Aplicando $y = x$ em i) temos:
 $f(xf(x)) = x.f(x)$
Então: $f(f(xf(x))) = f(xf(x)) = xf(x)$ (1)
Fazendo $x = 1$: $f(f(f(1))) = f(1.f(w)) = f(1)$ (2)
Fazendo $w = f(1)$: $f(f(w)) = f(1.f(w)) = w.f(1) = f(1).f(1) \Rightarrow$

$$f(f(f(1))) = f(1) \cdot f(1) \quad (3)$$

Comparando (2) com (3), temos: $f(1) = 1$

Suponhamos que z é um número real positivo arbitrário tal que $f(z) = z$.

$$\text{Então: } z \cdot f(1/z) = f((1/z) \cdot f(z)) = f(1) = 1 \Rightarrow f(1/z) = 1/z$$

Por indução, podemos provar que $f(z^n) = z^n$, para todos os inteiros n

Se $z > 1$, então $f(z^n) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$

Se $0 < z < 1$, $f(1/z^n) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$

Cada uma destas propriedades contradiz (ii). Então o único número que $f(z) = z$ é $z = 1$.

Portanto, aplicando em (1): $x \cdot f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1/x$

36)

Aplicando $y = 2$ em iii) e usando i), nós temos que:

$$f(xf(2)) \cdot f(2) = f(x+2) \Rightarrow f(x+2) = 0$$

Como $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$, temos que $f(x) = 0$ para $x \geq 2$

Suponhamos agora que $0 \leq z < 2$.

Aplicando $y = z$, $x = 2 - z$ em iii) temos: $f((2-z) \cdot f(z)) \cdot f(z) = f(2) = 0$

Como $f(z) \neq 0$, então: $f((2-z) \cdot f(z)) = 0 \Rightarrow (2-z) \cdot f(z) \geq 2 \Rightarrow$

$$f(z) \geq 2/(2-z)$$

Aplicando $x = 2/f(z)$, $y = z$ em iii) nós temos:

$$f(2) \cdot f(z) = f(2/f(z) + z) = 0 \Rightarrow 2/f(z) + z \geq 2 \Rightarrow f(z) \leq 2/(2-z)$$

$$\text{Então a única função que satisfaz é: } f(z) = \begin{cases} \frac{2}{2-z}, & \text{se } 0 \leq z < 2 \\ 0, & \text{se } z \geq 2 \end{cases}$$

37)

Fazendo $a = 1/6$ e $b = 1/7$ tem-se que:

$$f(x+a+b) - f(x+a) = f(x+b) - f(x)$$

$$x \rightarrow x+b: f(x+a+2b) - f(x+a+b) = f(x+2b) - f(x+b)$$

$$x \rightarrow x+2b: f(x+a+3b) - f(x+a+2b) = f(x+3b) - f(x+2b)$$

$$x \rightarrow x+3b: f(x+a+4b) - f(x+a+3b) = f(x+4b) - f(x+3b)$$

$$x \rightarrow x+4b: f(x+a+5b) - f(x+a+4b) = f(x+5b) - f(x+4b)$$

$$x \rightarrow x+5b: f(x+a+6b) - f(x+a+5b) = f(x+6b) - f(x+5b)$$

$$x \rightarrow x+6b: f(x+a+7b) - f(x+a+6b) = f(x+7b) - f(x+6b)$$

Somando estas equações: $f(x+a+1) - f(x+a) = f(x+1) - f(x)$

$$x \rightarrow x+a: f(x+2a+1) - f(x+2a) = f(x+a+1) - f(x+a)$$

$$x \rightarrow x+2a: f(x+3a+1) - f(x+3a) = f(x+2a+1) - f(x+2a)$$

$$x \rightarrow x+3a: f(x+4a+1) - f(x+4a) = f(x+3a+1) - f(x+3a)$$

$$x \rightarrow x+4a: f(x+5a+1) - f(x+5a) = f(x+4a+1) - f(x+4a)$$

$$x \rightarrow x+5a: f(x+6a+1) - f(x+6a) = f(x+5a+1) - f(x+5a)$$

Somando: $f(x+2) - f(x+1) = f(x+1) - f(x)$

Por indução segue que $f(x+n) - f(x) = n[f(x+1) - f(x)]$

Desde que $|f(x)| \leq 1$ então a função é limitada. Se $f(x+1) \neq f(x)$ então fazendo n crescer não teremos limitação para $f(x)$. Assim, necessariamente tem-se $f(x+1) = f(x)$.

38)

$$y = 1: f(f(x)^2) = x^3 f(x)$$

$$\text{Suponha que } f(a) = f(b) \Rightarrow f(a)^2 = f(b)^2 \Rightarrow f(f(a)^2) = f(f(b)^2) \Rightarrow$$

$$a^3 f(a) = b^3 f(b) \Rightarrow a = b \Rightarrow f \text{ é injetora}$$

$$y = f(y)^2: f(f(x)^2) \cdot f(y)^2 = x^3 f(xf(y)^2) \quad (1)$$

$$x \rightarrow y \text{ e } y \rightarrow x: f(f(y)^2 x) = y^3 f(xy) \quad (2)$$

$$x \rightarrow xy \text{ e } y = 1: x^3 y^3 f(xy) = f(f(xy)^2) \quad (3)$$

Multiplicando (1), (2) e (3):

$$f(f(x)^2) \cdot f(y)^2 \cdot \cancel{f(f(y)^2 x)} \cdot x^3 \cancel{y^3} f(xy) = x^3 \cancel{f(xf(y)^2)} \cdot \cancel{y^3} f(xy) \cdot f(f(xy)^2) \Rightarrow$$

$$f(f(x)^2) \cdot f(y)^2 = f(f(xy)^2)$$

Como f é injetora então $[f(x) \cdot f(y)]^2 = [f(xy)]^2 \xrightarrow{f>0} f(xy) = f(x)f(y)$

No exercício proposto 3 foi demonstrado que todas as funções $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfazem $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ são da forma $f(x) = x^c$. Substituindo em

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy): f(x^{2c} y) = x^3 (xy)^c \Rightarrow (x^{2c} y)^c = x^{3c} y^c \Rightarrow$$

$$2c^2 = c + 3 \Rightarrow 2c^2 - c - 3 = 0 \Rightarrow (c+1)(2c-3) = 0 \Rightarrow$$

$$c = -1 \text{ ou } c = 3/2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \text{ ou } f(x) = \sqrt{x^3}$$

Entretanto, observe que a imagem de $f(x) = \sqrt{x^3}$ não é o conjunto $\mathbb{Q}^+$.

Assim, a única possibilidade é $f(x) = \frac{1}{x}$.

39)

$$\text{Fazendo } w \rightarrow x, y \rightarrow x, z \rightarrow x: f(x^2) = f(x)^2 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$\text{Fazendo } x \rightarrow \sqrt{x}, y \rightarrow \sqrt{y}, z \rightarrow \sqrt{z}, w \rightarrow \sqrt{w}: \\ (y+z)(f(x) + f(w)) = (x+w)(f(z) + f(y))$$

$$\text{Fazendo } x \rightarrow \sqrt{yz} \text{ e } w \rightarrow \sqrt{yz}: (y+z)f(\sqrt{yz}) = \sqrt{yz}(f(x) + f(y))$$

$$\text{Fazendo } z = 1 \text{ e } y = x^2: \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)^2}{x^2 + 1} \Rightarrow [f(x) - x][x \cdot f(x) - 1] = 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = x \text{ ou } f(x) = \frac{1}{x}$$

40)

$$y = 0 \Rightarrow f(x + f(0)) = f(x) \quad (1)$$

$$x = 0 \quad y \rightarrow x \Rightarrow f(f(x)) = -x + f(0) \quad (2)$$

Deste modo $f(f(f(x))) = f(-x + f(0)) = f(-x)$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ em (1) $\Rightarrow f(f(0)) = f(0)$

Assim, $f(f(f(0))) = f(f(0)) = f(0)$

$x = 0 \Rightarrow y \rightarrow x \Rightarrow f(f(x)) = -x$

$y \rightarrow f(y) \Rightarrow f(x + f(f(y))) = f(x - y) = f(x) - f(y)$

$y = 1 \Rightarrow f(x - 1) = f(x) - f(1) \Rightarrow f(x) = f(x - 1) + f(1)$

Assim, temos que $f(nx) = nf(x)$, por indução $\Rightarrow f(n) = nf(1)$, $n \in \mathbb{Z}$

Entretanto, quando aplicamos $f(n) = nf(1)$ em $f(f(x)) = -x$:

$f(nf(1)) = -n \Rightarrow nf^2(1) = -n \Rightarrow f^2(1) = -1$ que não possui solução real

41)

$x = y = 0: f(0) = 0$

$x = 0, y^2 = t: f(t) = f(-t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$

Fazendo $x^2 - y^2 = a$ e $2xy = b$, tem-se que:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Substituindo na equação funcional: $f(a) + f(b) = f(\sqrt{a^2 + b^2})$

Fazendo $g(x) = f(\sqrt{x}) \Rightarrow g(a^2 + b^2) = g(a^2) + g(b^2)$

Fazendo $a = \sqrt{z}$ e $b = \sqrt{w} \Rightarrow g(z + w) = g(z) + g(w) \Rightarrow g(x) = g(1)x \Rightarrow$

$f(\sqrt{x}) = f(1)x \Rightarrow f(x) = f(1)x^2$

42)

$n = 0: f(m + f(0)) = f(m)$

1º caso: $f(0) = 0$

$m = : f(f(n)) = n \Rightarrow f$ é bijetora

$n \rightarrow f(n): f(m + f(f(n))) = f(m + n) = f(m) + f(n) \Rightarrow f(n) = nf(1) \Rightarrow$

$n = f(f(n)) = nf(1)^2 \Rightarrow f(1) = \pm 1 \Rightarrow f(n) = n$ ou $f(n) = -n$

2º caso: $f(0) \neq 0$

Assim, conclui-se que $f(n)$ é periódica e consequentemente limitada.

Seja $f(M) \geq f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que $f(M + f(1)) = f(M) + 1 \Rightarrow f(M) = f(M + f(1)) - 1 \Rightarrow$

$f(M) < f(M + f(1))$, que é uma contradição

Assim, as únicas funções que satisfazem a equação funcional são $f(n) = n$ e $f(n) = -n$.

43)

Sejam $f(0) = a$, $f(1) = b$ e $f(-1) = c$

$y = -1: f(x - 1) + cf(x) = f(-x) - 2x + 1$ (1)

$x \rightarrow x - 1, y = 1: f(x) + (b - 1)f(x - 1) + 2x - 1$ (2)

Multiplicando a equação (1) por $1 - b$:

$$(1 - b)f(x - 1) + c(1 - b)f(x) = (1 - b)[f(-x) - 2x + 1] \quad (3)$$

Somando as equações (2) e (3):

$$(1 + c - bc)f(-x) + (b - 1)f(x) = 2bx - b \quad (4)$$

$x \rightarrow -x$ em (4): $(1 + c - bc)f(x) + (b - 1)f(-x) = -2bx - b$

Assim, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (1 + c - bc)f(x) + (b - 1)f(-x) = -2bx - b \\ (b - 1)f(x) + (1 + c - bc)f(-x) = 2bx - b \end{cases}$$

Se o determinante da matriz principal deste sistema for diferente de 0 a solução deste sistema é $f(x) = mx + n$, onde m e n são reais. Substituindo na equação original obtém-se $f(x) = -x - 1$ ou $f(x) = 2x - 1$.

Se o determinante da matriz principal do sistema for igual a 0:

$$(1 + c - bc)^2 = (b - 1)^2$$

1º caso: $1 + c - bc = b - 1 \Rightarrow -2bx - b = 2bx - b \Rightarrow b = 0$

2º caso: $1 + c - bc = 1 - b \Rightarrow -2bx - b = -(2bx - b) \Rightarrow b = 0$

Fazendo $x = 0$ e $y = 1$ na equação original: $b + ab = a + 1 \Rightarrow a = -1$

$x = -1$ e $y = 1: a + bc = c - 1 \Rightarrow c = 0$

Substituindo os valores de a, b e c no sistema obtém-se $f(x) = f(-x)$:

$x \rightarrow x/2$ e $y \rightarrow y/2: f(x) + f(x/2)^2 = f(x^2/4) + x^2/2 + 1$

$x \rightarrow x/2$ e $y \rightarrow -x/2: -1 + f(x/2)^2 = f(x^2/4) - x^2/2 + 1$

Subtraindo estas equações $f(x) = x^2 - 1$.

Assim, as funções que satisfazem o enunciado são:

$f(x) = -x - 1$ ou $f(x) = 2x - 1$ ou $f(x) = x^2 - 1$

44)

Para todo número real positivo z tem-se que

$$f(x + f(y)) + z = f(x + y) + f(y) + z \Rightarrow$$

$$f(f(x + f(y)) + z) = f(f(x + y) + f(y) + z) \Rightarrow$$

$$f(x + f(y) + z) + f(x + f(y)) = f(x + y + f(y) + z) + f(x + y) \Rightarrow$$

$$f(a + y + z) + f(y) + f(x + y) + f(y) = f(x + 2y + z) + f(y) + f(x + y) \Rightarrow$$

$$f(x + y + z) + f(y) = f(x + 2y + z)$$

Fazendo $x + y + z = a$ e $y = b$ tem-se que $f(a) + f(b) = f(a + b) \Rightarrow$

$f(x) = cx$, para $x \in (0, \infty)$

Substituindo na equação funcional conclui-se que $c = 2$ e então $f(x) = 2x$, para $x \in (0, \infty)$

45)

$f(x) = 0$ é claramente uma solução. Vamos agora procurar outras funções que satisfazem.

Suponha que $f(a) = f(b)$.

$$x = a \text{ e } y = b: f(f(a) - f(b)) = f(f(a)) - 2a^2f(b) + f(b^2) \Rightarrow$$

$$f(0) = f(f(a)) - 2a^2f(b) + f(b^2)$$

$$x = y = b: f(f(b) - f(b)) = f(f(b)) - 2b^2f(b) + f(b^2) \Rightarrow$$

$$f(0) = f(f(b)) - 2b^2f(b) + f(b^2)$$

Subtraindo encontra-se que $a^2 = b^2$

Assim, de $f(a) = f(b)$ tem-se que $a^2 = b^2$ (1)

$x = y = 0$: $f(f(0)) - f(0) = f(f(0)) + f(0) \Rightarrow f(f(0)) = 0$

Fazendo $x = y = f(0)$:

$f(f(f(0))) - f(f(0)) = f(f(f(0))) - 2f(0)^2f(f(0)) + f(f(0)^2) \Rightarrow$

$f(0) = f(0) - 0 + f(f(0)^2) \Rightarrow f(f(0)^2) = 0$

Assim, conclui-se que $f(f(0)) = 0$ e $f(f(0)^2) = 0$. Usando o resultado (1)

conclui-se que $[f(0)]^2 = [f(0)]^4 \Rightarrow f(0) = 0, -1$ ou 1

1º caso: $f(0) = 0$

Fazendo $x = 0$ e $y \rightarrow x$: $f(-f(x)) = f(x^2) \Rightarrow [-f(x)]^2 = (x^2)^2 \Rightarrow$

$f(x) = x^2$ ou $f(x) = -x^2$

2º caso: $f(0) = 1$

$f(f(0)) = f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$x = 0$ e $y \rightarrow x$: $f(1 - f(x)) = f(1) - 0 + f(x^2) \Rightarrow f(1 - f(x)) = f(x^2) \Rightarrow$

$(1 - f(x))^2 = x^4 \Rightarrow 1 - f(x) = \pm x^2 \Rightarrow f(x) = 1 \pm x^2$

Desde que $f(1) = 0$ então $f(x) = 1 - x^2$

3º caso: $f(0) = -1$

$f(f(0)) = f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$

$x = 0$ e $y \rightarrow x$: $f(-1 - f(x)) = f(-1) - 0 + f(x^2) \Rightarrow f(-1 - f(x)) = f(x^2) \Rightarrow$

$(-1 - f(x))^2 = x^4 \Rightarrow 1 + f(x) = \pm x^2 \Rightarrow f(x) = \pm x^2 - 1$

Substituindo na equação funcional verifica-se que apenas $f(x) = x^2 - 1$ satisfaz.

Assim, as funções que satisfazem $f(f(x)) - f(y) = f(f(x)) - 2x^2f(y) + f(y^2)$ são $0, x^2, -x^2, 1 - x^2$ e $x^2 - 1$.

46)

Note que se $f(f(n)) = 3n$ então $f(f(f(n))) = 3f(n) = f(3n)$

Como $f(n+1) > f(n)$ então $f(1) \geq 1$ e $f(3) > f(1)$

Aplicando $n = 1$ em $f(f(n)) = 3n$ tem-se que $f(f(1)) = 3 \Rightarrow f(1) \neq 1$

Se $f(1) = 3$ então $f(3) = 3 = f(1)$, que é falso, pois $f(3) > f(1)$

Se $f(1) = b > 3$ então $f(f(1)) = 3 \Rightarrow f(b) = 3$, que é impossível, pois assim $b > 1$ e $f(b) < f(1)$, que contradiz o fato de f ser crescente

Assim, a única possibilidade é $f(1) = 2$

Logo: $f(f(1)) = 3 \Rightarrow f(2) = 3$

$f(f(2)) = 6 \Rightarrow f(3) = 6$

$f(f(3)) = 9 \Rightarrow f(6) = 9$

$f(f(6)) = 18 \Rightarrow f(9) = 18$

$f(f(9)) = 27 \Rightarrow f(18) = 27$

...

Segue por indução que $f(3^k) = 2 \cdot 3^k$ e que $f(2 \cdot 3^k) = 3^{k+1}$

Como f é crescente, $f(3) = 6, f(6) = 9$ e $6 - 3 = 9 - 6$, tem-se que $f(4) = 7$ e $f(5) = 8$

$f(f(4)) = 12 \Rightarrow f(7) = 12$

$f(f(5)) = 15 \Rightarrow f(8) = 15$

Desde que f é crescente, $f(9) = 18, f(18) = 27$ e $18 - 9 = 27 - 18$, tem-se que $f(10) = 19, f(11) = 20, f(12) = 21, \dots, f(17) = 26$

Generalizando, como $f(3^k) = 2 \cdot 3^k, f(2 \cdot 3^k) = 3 \cdot 3^k$ e $3 \cdot 3^k - 2 \cdot 3^k = 2 \cdot 3^k - 3^k$, então para $0 \leq n \leq 3^k$ tem-se que $f(3^k + n) = 2 \cdot 3^k + n$

Aplicando f nesta última expressão: $f(f(3^k + n)) = f(2 \cdot 3^k + n)$

Entretanto, como $f(f(n)) = 3n$, tem-se que $f(2 \cdot 3^k + n) = 3^{k+1} + 3n$

Como $1992 = 2 \cdot 3^6 + 534$ então $f(1992) = 3^7 + 3 \cdot 534 = 3789$

8.2. PARTE B

1) $f(x) = ax$. Dica: Demonstre que $f(nx) = nf(x)$

2) $f(x) = a^{Ax+B}$. Dica: Aplique $\log_a$ nos dois lados da equação funcional.

3) $f(x) = [f(1)]^{x^2}$. Dica: Demonstre que $f(kx) = [f(x)]^{k^2}$

4) $f(x) = a^x + 1$. Dica: Faça $g(x) = f(x) - 1$.

5) $f(x) = x + 1$

6) Dica: Analise quantos inteiros existem entre $f(2n)$ e $f(n)$.

8) Dica: Mostre que $f(x+1) \geq f(x) + 1$ e $f(x+1) \leq f(x) + 1$.

9) $f(x) = -x + b$

10) Dica: Observe o que ocorre com a equação $f(f(f(x))) = x$

11) $f(x) = x + 1$. Dica: Calcule $f(1)$ e depois faça $y = 1$.

12) $n = -2$

13) $1/500$. Dica: Demonstre que existe um número a tal que $f(a) = 500$.

14) b) $2^{1990} - 1$. Dica: a) Substitua em $f(n+1) = f(n) - 1$ valores de n tais que $2^j \leq n \leq 2^{j+1} - 1$. Depois some tudo.

15) 1994. Dica: Faça $x = 3$ e depois $x = 35$.

16) $f(z) = 1$. Dica: Faça $z \rightarrow 1 - z$.

19) $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$. Dica: Primeiro faça $x = 0$ e prove que f é injetora. Depois faça $y \rightarrow x$.

20) $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$

21) $f(9) = 9$. Dica: Prove que $f(8) = f(9)$.

22) $f(x) = x + 1$ ou $f(x) = 1 - x$. Dica: Primeiro prove que $f(0) = 1$. Depois prove que $f(-1)f(1) = 0$ e analise cada caso.

23) $f(x) = 0$ ou $f(x) = x$

24) 4015. Dica: Faça $x \rightarrow -a$ e $x \rightarrow a + 1$, para demonstrar que $f(a^2 - a + 3) = 2(a^2 - a + 3) - 3$.

25) Dica: Primeiro prove que $f(x) - f(x + 1) \leq 1/2$ e depois mostre que existe um k tal que $f(x + k) \leq 0$

26) $f(1995) = 95, 190, 285, 380, 570$ ou 760 . Dica: Trabalhe com a fatoração de 1995.

27) Não existe função que satisfaz

28) $f(x) = 0$ ou $f(x) = x$. Dica: Prove que $f(1) = 1$, que $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e que $f(f(x)) = x$.

29) $f(x) = 4x^2 - 115$. Dica: Calcule $f(0)$ e depois faça $y \rightarrow -x$

30) $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Dica: Calcule $f(1)$ depois faça $y = 1$.

31) 61. Dica: Fazendo $g(x) = 1/f(x)$, demonstre que $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

DESIGUALDADES

9.1. PARTE A

1)

Desde que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Rightarrow x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$

Assim: $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Multiplicando: $(b + c)(c + a)(a + b) \geq 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \cdot 2\sqrt{ab} = 8abc$

2)

Pela desigualdade entre as médias aritmética e harmônica:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$

3)

Considere a expressão $P = \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Fazendo $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$:

$$P = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y \Rightarrow$$

$$P = \frac{x^3 + y^3 - x^2y - xy^2}{xy} = \frac{x^2(x - y) + y^2(y - x)}{xy} = \frac{(x - y)(x^2 - y^2)}{xy} = \frac{(x + y)(x - y)^2}{xy}$$

Como todos os fatores em P são maiores ou iguais a zero segue que $P \geq 0$

4)

Multiplicando por abc a inequação fica da forma:

$$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$b^2c^2 + a^2c^2 \geq 2\sqrt{b^2c^2 \cdot a^2c^2} = 2abc^2$$

$$b^2c^2 + a^2b^2 \geq 2\sqrt{b^2c^2 \cdot a^2b^2} = 2ab^2c$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2 \cdot a^2c^2} = 2a^2bc$$

Somando estas três inequações conclui-se que

$$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$$

5)

Note que $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = \frac{x}{S-x} + \frac{y}{S-y} + \frac{z}{S-z}$ onde $S = x + y + z$

Seja $f(x) = \frac{x}{S-x}$. Como $f(x)$ é uma função côncava, pela desigualdade de Jensen:

$$\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} \geq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = f\left(\frac{S}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}}{3} \geq 3 \cdot \frac{\frac{S}{3}}{S - \frac{S}{3}} = 3 \cdot \frac{\frac{S}{3}}{\frac{2S}{3}} = \frac{3}{2}$$

6)

Observe que $(a+b)(a+c) = a^2 + ac + ab + bc = bc + a(a+b+c)$.
Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica sabe-se que $x+y \geq 2\sqrt{xy}$. Fazendo $x = bc$ e $y = a(a+b+c)$ tem-se que

$$bc + a(a+b+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

7)

Pela desigualdade de Cauchy, sabe-se que se $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ são reais dados, não todos nulos ($n > 1$), então:

$$|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$$

Fazendo $n = 4$, $a_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $a_3 = \frac{2}{\sqrt{c}}$, $a_4 = \frac{4}{\sqrt{d}}$, $b_1 = \sqrt{a}$, $b_2 = \sqrt{b}$,

$b_3 = \sqrt{c}$, $b_4 = \sqrt{d}$, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b} + \frac{2}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{c} + \frac{4}{\sqrt{d}} \cdot \sqrt{d} \geq \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}} \sqrt{a+b+c+d} \Rightarrow$$

$$1+1+2+4 \geq \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}\right)(a+b+c+d)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

8)

$$\begin{aligned} 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) &= \\ &= 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 2(ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c) = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + (a^3 + b^3 + c^3) + 2(ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c) = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + (a^2 + bc^2 + b^2c) + (b^3 + ac^2 + c^2a) + (c^3 + ab^2 + a^2b) + \\ &+ (ab^2 + a^2c + bc^2) + (a^2b + ac^2 + b^2c) \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$a^3 + bc^2 + b^2c \geq 3\sqrt[3]{a^3 bc^2 b^2 c} = 3abc$$

$$b^3 + ac^2 + c^2a \geq 3\sqrt[3]{b^3 ac^2 c^2 a} = 3abc$$

$$c^3 + ab^2 + a^2b \geq 3\sqrt[3]{c^3 ab^2 a^2 b} = 3abc$$

$$ab^2 + a^2c + bc^2 \geq 3\sqrt[3]{ab^2 a^2 cbc^2} = 3abc$$

$$a^2b + ac^2 + b^2c \geq 3\sqrt[3]{a^2 bac^2 b^2 c} = 3abc$$

Somando estas inequações:

$$2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 15abc$$

9)

(i) Pela desigualdade entre a média aritmética e a média harmônica:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

$$\text{Rearranjando a desigualdade temos: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Fazendo $n = 3$, $x_1 = a+b$, $x_2 = b+c$, $x_3 = c+a$:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+b+c+c+a} = \frac{9}{2(a+b+c)} \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$$

(ii) Utilizando novamente a desigualdade entre a média aritmética e a média harmônica, aplicando agora para $1/a$ e $1/b$, $1/b$ e $1/c$, $1/a$ e $1/c$, separadamente, temos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+c}$$

$$\text{Somando temos: } 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

10)

Da desigualdade de Cauchy sabe-se que:

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

$$\text{Fazendo } x_1 = \sqrt{a_1 + b_1} \quad x_2 = \sqrt{a_2 + b_2} \quad \dots \quad x_n = \sqrt{a_n + b_n}$$

$$y_1 = \sqrt{\frac{a_1^2}{a_1 + b_1}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1 + b_1}} \quad y_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_2 + b_2}} \quad \dots \quad y_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n + b_n}} \quad \text{temos:}$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} [(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)].S &\geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \Rightarrow \\ [(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)].S &\geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \Rightarrow \\ 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n).S &\geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \Rightarrow S \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/2 \end{aligned}$$

11)

$$\text{Fatorando-se: } x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz(x + y + z)$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \Rightarrow 1 \geq 27(xyz)^2 \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} \Rightarrow x + y + z \leq \sqrt{3}$$

$$\text{Multiplicando obtém-se } x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}.$$

12)

Pela Desigualdade de Cauchy segue que:

$$|a_1x_1 + \dots + a_nx_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

Como cada $|a_i| \leq k - 1$, então

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \leq (k - 1)^2 + \dots + (k - 1)^2 = n(k - 1)^2$$

Como $k \geq 2$, então

$$(k^n - 1)^2 \geq 1 \Rightarrow a_1^2 + \dots + a_n^2 \leq n(k - 1)^2 \leq n(k - 1)^2 / (k^n - 1)^2$$

$$\text{Então } |a_1x_1 + \dots + a_nx_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq \sqrt{\frac{n(k - 1)^2}{(k^n - 1)^2}} \Rightarrow$$

$$|a_1x_1 + \dots + a_nx_n| \leq \frac{(k - 1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

13)

$$\text{Sejam } a = \sqrt{x - 1}, b = \sqrt{y - 1}, c = \sqrt{z - 1}$$

$$\text{Assim: } \frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} + \frac{1}{1 + c^2} = 2 \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2b^2c^2 = 1$$

$$\text{A inequação é equivalente a } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 3 \geq a + b + c \Rightarrow$$

$$ab + bc + ca \leq 3/2$$

Sejam $p = bc$, $q = ca$, $r = ab$. Assim, deve-se demonstrar que

$$p + q + r \leq 3/2, \text{ onde } p^2 + q^2 + r^2 + 2pqr = 1$$

Sabe-se que, se A , B e C são ângulos de um triângulo, então

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$$

Portanto, pode-se fazer $p = \cos A$, $q = \cos B$ e $r = \cos C$. Desta forma, a desigualdade fica da forma: $\cos A + \cos B + \cos C \leq 3/2$

Desde que $f(x) = \cos x$ é uma função convexa para $0 < x < \pi$, então:

$$\frac{f(A) + f(B) + f(C)}{3} \geq f\left(\frac{A + B + C}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \geq 3 \cdot \cos(\pi/6) = 3/2$$

14)

$$\text{Como } a + b = 1: \frac{a^2}{(a + b)[a + (a + b)]} + \frac{b^2}{(a + b)[b + (a + b)]} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2}{(a + b)(2a + b)} + \frac{b^2}{(a + b)(a + 2b)} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2(a + 2b) + b^2(2a + b)}{(a + b)(2a + b)(a + 2b)} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3}{(a + b)(2a^2 + 5ab + 2b^2)} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{(a + b)^3 - ab(a + b)}{(a + b)(2a^2 + 5ab + 2b^2)} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{(a + b)(a^2 + ab + b^2)}{(a + b)(2a^2 + 5ab + 2b^2)} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$3a^2 + 3ab + 3b^2 \geq 2a^2 + 5ab + 2b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

15)

Pela desigualdade $MA \geq MG$:

$$\text{i) } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow a + b + c \geq 3$$

$$\text{ii) } ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc} \Rightarrow ab + ac + bc \geq 3 \Rightarrow ab + ac + bc - 2 \geq 1$$

$$\text{Logo: } (a + b + c)(ab + ac + bc - 2) \geq 3 \Rightarrow$$

$$2(a + b + c) \leq ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + a + b} + \frac{1}{1 + b + c} + \frac{1}{1 + c + a} - 1 &= \frac{2 + 2a + 2b + 2c - (a + b)(b + c)(a + c)}{(1 + a + b)(1 + b + c)(1 + c + a)} = \\ &= \frac{2a + 2b + 2c - ab(a + b) - bc(b + c) - ac(a + c)}{(1 + a + b)(1 + b + c)(1 + c + a)} \leq 0 \end{aligned}$$

16)

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} =$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{c}\right) - 1$$

Aplicando o teorema das médias aritmética e geométrica:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 3\left(\frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right) - 1 =$$

$$= 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} - 1$$

Lembrando que $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} - 1 \geq$$

$$\geq 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) + 3 - 1 = 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

17)

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} + c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} + d^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} + e^2\right)$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{a^2}{4} + b^2 \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot b^2} = ab \quad \frac{a^2}{4} + c^2 \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot c^2} = ac$$

$$\frac{a^2}{4} + d^2 \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot d^2} = ad \quad \frac{a^2}{4} + e^2 \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot e^2} = ae$$

Somando estas desigualdades obtém-se:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

18)

$$\text{Se } y_1^2 + y_2^2 \geq 1 \Rightarrow (x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2 \geq 0 \geq (x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1)$$

Suponhamos que $y_1^2 + y_2^2 < 1$. Sejam $a = 1 - x_1^2 - x_2^2$ e $b = 1 - y_1^2 - y_2^2$.

Note $0 \leq a, b \leq 1$.

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2 \geq (x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$(2 - 2x_1 y_1 - 2x_2 y_2)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + a + b]^2 \geq 4ab \Leftrightarrow$$

$$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + a + b]^2 \geq (a + b)^2 \geq 4ab$$

19)

Da desigualdade entre as médias aritmética-geométrica-harmônica:

$$(1) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \quad (2) xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2$$

Assim:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{9}{1+ab+1+bc+1+ca} = \frac{9}{3+(ab+bc+ca)} \stackrel{(2)}{\geq}$$

$$\geq \frac{9}{3+(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9}{3+3} = \frac{3}{2}$$

20)

Inicialmente note que $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 - a^3}{c^2 + ca + a^2} = 0$

Logo, é suficiente demonstrar que

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{3}$$

Além disso: $2a^2 + 2b^2 \geq 4ab \Rightarrow$

$$3a^2 + 3b^2 \geq a^2 + b^2 + 4ab \Rightarrow 3a^2 - 3ab + 3b^2 \geq a^2 + ab + b^2 \Rightarrow$$

$$3(a^2 - ab + b^2) \geq a^2 + ab + b^2$$

Assim:

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq$$

$$\geq \frac{a^3 + b^3}{3(a^2 - ab + b^2)} + \frac{b^3 + c^3}{3(b^2 - bc + c^2)} + \frac{c^3 + a^3}{3(c^2 - ca + a^2)} =$$

$$= \frac{a+b}{3} + \frac{b+c}{3} + \frac{c+a}{3} = \frac{2(a+b+c)}{3}$$

21)

Fazendo $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, então a desigualdade fica da forma

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz, \text{ com } x+y+z=1$$

Logo: $(1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz \Leftrightarrow$

$$1 - (x+y+z) + (xy+xz+yz) - xyz \geq 8xyz \Leftrightarrow$$

$$xy + xy + yz \geq 9xyz \Leftrightarrow (x+y+z)(xy+xy+yz) \geq 9xyz$$

Como $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ e $xy+xz+yz \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$ então segue que

$$(x+y+z)(xy+xy+yz) \geq 9xyz$$

22)

Sejam $a_1 = \sqrt[n]{x_1}$, $a_2 = \sqrt[n]{x_2}$, ..., $a_n = \sqrt[n]{x_n}$, onde que $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{1}{n-1+a_k^n} = \frac{1}{n-1+\frac{a_k^{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_n}} \leq \frac{1}{n-1+\frac{(n-1)a_k^{n-1}}{a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\dots+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+\dots+a_n^{n-1}}} =$$

$$= \frac{a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\dots+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+\dots+a_n^{n-1}}{(n-1)(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\dots+a_n^{n-1})}$$

Logo: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n-1+a_k^n} \leq \frac{(n-1)(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\dots+a_n^{n-1})}{(n-1)(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\dots+a_n^{n-1})} = 1$

23)

$$x+y+z-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z} = x+y+z-xyz-xz-xy = xyz-xy-zx+x+y+z-1 =$$

$$= (x-1)(y-1)(z-1) \leq 0$$

Note agora que $x > 1 \Leftrightarrow x^k > 0$ e que $x < 1 \Leftrightarrow x^k < 0$.

$$\text{Desta forma } (x-1)(y-1)(z-1) \leq 0 \Leftrightarrow (x^k-1)(y^k-1)(z^k-1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(xyz)^k - (xy)^k - (yz)^k - (xz)^k + x^k + y^k + z^k - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{1}{z^k} - \frac{1}{x^k} - \frac{1}{y^k} + x^k + y^k + z^k - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geq x^k + y^k + z^k$$

24)

Note que se $a \geq b \geq c$:

$$(a+3b)(b+4a)(c+2a) = \left(a + \frac{b}{3} + \frac{8b}{3}\right) \left(b + \frac{2c}{3} + \frac{10c}{3}\right) (c+2a) \geq$$

$$\geq \left(a + \frac{a}{3} + \frac{8b}{3}\right) \left(b + \frac{2b}{3} + \frac{10c}{3}\right) (c+2a) \Rightarrow$$

$$(a+3b)(b+4a)(c+2a) \geq \frac{20}{9}(a+2b)(b+2c)(c+2a)$$

Aplicando a desigualdade da média aritmética e geométrica:

$$a+2b = a+b+b \geq 3\sqrt[3]{ab^2}$$

$$\text{Analogamente: } b+2c \geq 3\sqrt[3]{bc^2} \text{ e } c+2a \geq 3\sqrt[3]{ca^2}$$

$$\text{Logo: } (a+3b)(b+4a)(c+2a) \geq \frac{20}{9} 27\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 60abc$$

25)

Pela desigualdade de Cauchy: $(xt + yu + zv)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(t^2 + u^2 + v^2)$

$$\text{Fazendo } x = \sqrt{\frac{a}{b+2c}}, y = \sqrt{\frac{b}{c+2a}}, z = \sqrt{\frac{c}{a+2b}}, t = \sqrt{a(b+2c)},$$

$$u = \sqrt{b(c+2a)}, v = \sqrt{c(a+2b)}:$$

$$(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}\right)(a(b+2c) + b(c+2a) + c(a+2b)) \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+ac+bc)}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq$$

$$\geq ab + ac + bc + 2ab + 2ac + 2bc = 3(ab + ac + bc)$$

$$\text{Desta maneira, segue diretamente que } \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

26)

Pela desigualdade de Cauchy $(mt + nu + pv)^2 \leq (m^2 + n^2 + p^2)(t^2 + u^2 + v^2)$

$$\text{Fazendo } m = \sqrt{\frac{a^3}{x}}, n = \sqrt{\frac{b^3}{y}}, z = \sqrt{\frac{c^3}{z}}, t = \sqrt{x}, u = \sqrt{y}, v = \sqrt{z}:$$

$$(a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2})^2 \leq \left(\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z}\right)(x+y+z) \Rightarrow$$

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2})^2}{x+y+z}$$

Pela desigualdade entre as Médias de Potência sabe-se que se $x < y$ são reais positivos, então, para todos $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais positivos, vale

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}\right)} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1^y + a_2^y + \dots + a_n^y}{n}}.$$

Fazendo $n = 3, y = 3/2, x = 1, a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c$:

$$\left(\frac{a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2}}{3}\right)^{2/3} \geq \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow (a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2})^2 \geq \frac{(a+b+c)^3}{3}$$

$$\text{Assim: } \frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2})^2}{x+y+z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

27)

Inicialmente faça $P = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 = x^2 + 2xy + 2xy + 4y^2 + z^2 + z^2$

Pela desigualdade as médias aritmética e geométrica:

$$P \geq 6\sqrt[6]{(x^2)(2xy)(2xy)(4y^2)(z^2)(z^2)} = 6\sqrt[6]{2^3 x^4 y^4 z^4} = 6\sqrt[6]{2(xyz)^4} \Rightarrow$$

$$P \geq 6\sqrt[6]{2^4 2^{20}} = 6\sqrt[6]{2^{24}} = 6 \cdot 2^4 \Rightarrow P \geq 96.$$

28)

Note que: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 =$

$$= \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} \right) + \left(\frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{3} + \frac{c^3}{3} \right) + \left(\frac{c^3}{3} + \frac{c^3}{3} + \frac{d^3}{3} \right) + \left(\frac{d^3}{3} + \frac{d^3}{3} + \frac{a^3}{3} \right)$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 a^3 b^3} = a^2 b \quad \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{b^3 b^3 c^3} = b^2 c$$

$$\frac{c^3 + c^3 + d^3}{3} \geq \sqrt[3]{c^3 c^3 d^3} = c^2 d \quad \frac{d^3 + d^3 + a^3}{3} \geq \sqrt[3]{d^3 d^3 a^3} = d^2 a$$

Somando estas desigualdades segue diretamente que

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a$$

29)

Sabe-se que $(x - \sqrt{y^2 + 1})^2 \geq 0$ e $(y - \sqrt{x^2 + 1})^2 \geq 0$. Assim:

$$(x - \sqrt{y^2 + 1})^2 + (y - \sqrt{x^2 + 1})^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 \geq x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$$

A igualdade ocorre quando $x^2 = y^2 + 1$ e $y^2 = x^2 + 1$. Como este sistema não possui solução, nunca ocorre a igualdade. Desta maneira:

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$$

30)

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} = \frac{a(c+1) + b(a+1) + c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

$$= \frac{ab + ac + bc + a + b + c}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 - 2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

$$= \frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 2}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1 - \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Se $abc = 1$ então $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$ e $ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3$

Assim:

$$(a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 \geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

$$\text{Logo: } \frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$$

31)

Como $MA \geq MG$: $xy + yz \geq 2y\sqrt{xz}$, $xz + yz \geq 2z\sqrt{xy}$, $xy + xz \geq 2x\sqrt{yz}$

$$\text{Somando: } 2xy + 2yz + 2xz \geq 2x\sqrt{yz} + 2y\sqrt{xz} + 2z\sqrt{xy} \quad (1)$$

$$\text{Por } MA \geq MG: \quad x^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 4x\sqrt{yz}, \quad y^2 + y^2 + x^2 + z^2 \geq 4y\sqrt{xz},$$

$$z^2 + z^2 + x^2 + y^2 \geq 4z\sqrt{xy}$$

$$\text{Somando: } x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy} \quad (2)$$

$$\text{Fazendo (1) + (2): } \frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}$$

32)

Seja $S = a + b + c$. Assim, a desigualdade pode ser expressa da forma

$$\frac{a}{(S-a)^2} + \frac{b}{(S-b)^2} + \frac{c}{(S-c)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Definindo $f(x) = \frac{x}{(S-x)^2}$, pode-se demonstrar que $f'(x) > 0$ para $x > 0$,

ou seja, a função f é convexa.

Pela desigualdade de Jensen: $f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f[(a+b+c)/3] \Rightarrow$

$$\frac{a}{(S-a)^2} + \frac{b}{(S-b)^2} + \frac{c}{(S-c)^2} \geq 3 \frac{\frac{a+b+c}{3}}{\left[(a+b+c) - \frac{a+b+c}{3} \right]^2} = \frac{9}{4(a+b+c)}$$

33)

Como $abc = 1$ pode-se fazer $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ e $c = \frac{z}{x}$.

Substituindo na desigualdade:

$$\frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \Leftrightarrow x^3 z^3 + x^3 y^3 + y^3 z^3 \geq x^3 y z^2 + x^2 y^3 z + x y^2 z^3$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{x^3 z^3 + x^3 z^3 + x^3 y^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3 z^3 x^3 z^3 x^3 y^3} = x^3 y z^2$$

$$\frac{x^3 y^3 + x^3 y^3 + y^3 z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3 y^3 x^3 y^3 y^3 z^3} = x^2 y^3 z$$

$$\frac{y^3 z^3 + y^3 z^3 + x^3 z^3}{3} \geq \sqrt[3]{y^3 z^3 y^3 z^3 x^3 z^3} = x y^2 z^3$$

Somando estas equações segue que

$$x^3 z^3 + x^3 y^3 + y^3 z^3 \geq x^3 y z^2 + x^2 y^3 z + x y^2 z^3$$

34)

Seja $p = |(x-y)(y-z)(z-x)|$. Usando o fato de $MA \geq MG$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2} \geq$$

$$\geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{|(x-y)(y-z)(z-x)|^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{p^2} \quad (1)$$

Desde que $|x-y| \leq x+y$, $|y-z| \leq y+z$, $|z-x| \leq z+x$, somando:

$$2(x+y+z) \geq |x-y| + |y-z| + |z-x|$$

Novamente por $MA \geq MG$:

$$2(x+y+z) \geq |x-y| + |y-z| + |z-x| \geq 3\sqrt[3]{|(x-y)(y-z)(z-x)|} = 3\sqrt[3]{p} \quad (2)$$

Multiplicando as desigualdades (1) e (2):

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)(x+y+z) \geq \frac{9}{2} |(x-y)(y-z)(z-x)| \Rightarrow$$

$$2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 6xyz \geq \frac{9}{2} |(x-y)(y-z)(z-x)| \Rightarrow$$

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4} |(x-y)(y-z)(z-x)|$$

35)

Como $a+b+c=1$: $a+bc = a(a+b+c) + bc = (a+b)(a+c)$

Desta forma, por $MA \geq MG$: $\sqrt{a+bc} = \sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{2a+b+c}{2}$

De forma análoga, segue que: $\sqrt{b+ca} \leq \frac{2b+c+a}{2}$ e $\sqrt{c+ab} \leq \frac{2c+a+b}{2}$

Somando:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq \frac{2a+b+c}{2} + \frac{2b+c+a}{2} + \frac{2c+a+b}{2} = \frac{4(a+b+c)}{2} = 2$$

36)

Como $xyz = 1$ pode-se fazer $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ e $z = \frac{c}{a}$. Substituindo na desigualdade:

$$\frac{1}{yz+z} + \frac{1}{zx+x} + \frac{1}{xy+y} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \text{ que já foi demonstrado no exemplo resolvido n}^\circ 5.$$

37)

Fazendo $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ a condição $ab+bc+ca = abc$ fica da forma x

$$+ y + z = 1 \text{ e a desigualdade fica } \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} + \frac{y^4+z^4}{y^3+z^3} + \frac{z^4+x^4}{z^3+x^3} \geq 1$$

Pela desigualdade de Chebychev sabe-se que, se $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ e $b_1 \leq b_2 \leq b_3$,

$$\text{então: } \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{2} \geq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right)$$

Fazendo $a_1 = x^3$, $a_2 = y^3$, $b_1 = x$, $b_2 = y$:

$$\frac{x^4+y^4}{2} \geq \left(\frac{x^3+y^3}{2} \right) \left(\frac{x+y}{2} \right) \Rightarrow \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} \geq \frac{x+y}{2}$$

$$\text{Analogamente: } \frac{y^4+z^4}{y^3+z^3} \geq \frac{y+z}{2} \text{ e } \frac{x^4+z^4}{x^3+z^3} \geq \frac{x+z}{2}$$

Somando estas desigualdades obtém-se:

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} + \frac{y^4+z^4}{y^3+z^3} + \frac{x^4+z^4}{x^3+z^3} \geq x+y+z=1$$

38)

Da desigualdade de Cauchy sabe-se que $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$

Portanto, segue que: $abc \leq a+b+c \Rightarrow$

$$(abc)^2 \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(abc)^2}{3} \quad (1)$$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^3 \geq 27(abc)^2 \quad (2)$$

Multiplicando as desigualdades (1) e (2):

$$(a^2+b^2+c^2)^4 \geq 3^2(abc)^4 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt[4]{3}abc$$

39)

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2} \right) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c) \geq 8(a+b)(a+c)(b+c)$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$2a+b+c = (a+b) + (a+c) \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)}$$

Analogamente segue que:

$$a+2b+c \geq 2\sqrt{(a+b)(b+c)} \text{ e } a+b+2c = (a+c) + (b+c) \geq 2\sqrt{(a+c)(b+c)}$$

Multiplicando estas desigualdades:

$$(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c) \geq 8(a+b)(a+c)(b+c)$$

40)

Desde que $1-a=b+c$, então a desigualdade pode ser escrita da forma:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e harmônica tem-se que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

$$\text{Assim: } \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{4}{b+c+a+c} = \frac{4}{(a+b+c)+c} = \frac{4}{1+c}.$$

$$\text{Analogamente: } \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{1+b} \text{ e } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{4}{1+a}$$

Somando estas desigualdades segue que

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

41)

Note que

$$a^3 + b^3 + c^3 = \left(\frac{a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + b^3 + c^3}{6} \right) + \left(\frac{a^3 + b^3 + b^3 + b^3 + b^3 + c^3}{6} \right) + \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3 + c^3 + c^3 + c^3}{6} \right)$$

$$\text{Por } MA \geq MG: \frac{a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + b^3 + c^3}{6} \geq \sqrt[6]{a^3 a^3 a^3 a^3 b^3 c^3} = a^2 \sqrt{bc}$$

Analogamente:

$$\frac{a^3 + b^3 + b^3 + b^3 + b^3 + c^3}{6} \geq b^2 \sqrt{ac} \text{ e } \frac{a^3 + b^3 + c^3 + c^3 + c^3 + c^3}{6} \geq c^2 \sqrt{ab}$$

Somando estas desigualdades segue que

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 \sqrt{bc} + b^2 \sqrt{ca} + c^2 \sqrt{ab}.$$

42)

Usando a desigualdade de Chebychev sabe-se que:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)}{3}.$$

Além disso, pela desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1$$

Da desigualdade de Cauchy: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$\text{Assim: } a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{(a+b+c)}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \geq 1 \cdot (ab + bc + ca).$$

43)

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica segue que

$$a^2 + bc \geq 2\sqrt{a^2 bc} = 2\sqrt{ab} \sqrt{ca}.$$

$$\text{Analogamente: } b^2 + ca \geq 2\sqrt{bc} \sqrt{ab} \text{ e } c^2 + ab \geq 2\sqrt{ca} \sqrt{bc}$$

$$\text{Assim: } \frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{ab} \sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{bc} \sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ca} \sqrt{bc}} \right)$$

Pela desigualdade de Cauchy:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{ab} \sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{bc} \sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ca} \sqrt{bc}} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \left(\frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} \right)$$

Logo:

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{ab} \sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{bc} \sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ca} \sqrt{bc}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)$$

44)

$$\text{Aplicando } MA \geq MG: ca + c + a \geq 3\sqrt[3]{c^2 a^2}.$$

$$\text{Assim: } \frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2 a^2} + 1} \geq \frac{(a+1)(b+1)^2}{ca + c + a + 1} = \frac{(a+1)(b+1)^2}{(c+1)(a+1)} = \frac{(b+1)^2}{(c+1)}$$

A desigualdade fica agora na forma:

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2 a^2} + 1} + \frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2 b^2} + 1} + \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2 c^2} + 1} \geq \frac{(b+1)^2}{c+1} + \frac{(c+1)^2}{a+1} + \frac{(a+1)^2}{b+1}$$

Pela desigualdade de Cauchy: $(xt + yu + zv)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(t^2 + u^2 + v^2)$

$$\text{Fazendo } x = \frac{b+1}{\sqrt{c+1}}, y = \frac{c+1}{\sqrt{a+1}}, z = \frac{a+1}{\sqrt{b+1}}, t = \sqrt{c+1}, u = \sqrt{a+1}, v = \sqrt{b+1}$$

$$(b+1+c+1+a+1)^2 \leq \left[\frac{(b+1)^2}{c+1} + \frac{(c+1)^2}{a+1} + \frac{(a+1)^2}{b+1} \right] (b+1+c+1+a+1) \Rightarrow$$

$$\frac{(b+1)^2}{c+1} + \frac{(c+1)^2}{a+1} + \frac{(a+1)^2}{b+1} \geq a+b+c+3 \Rightarrow$$

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2 a^2} + 1} + \frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2 b^2} + 1} + \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2 c^2} + 1} \geq a+b+c+3$$

45)

Pela desigualdade de Cauchy: $(xt + yu + zv)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(t^2 + u^2 + v^2)$

$$\text{Fazendo } x = \frac{a}{\sqrt{2+b+c^2}}, y = \frac{b}{\sqrt{2+c+a^2}}, z = \frac{c}{\sqrt{2+a+b^2}}, t = \sqrt{2+b+c^2},$$

$$u = \sqrt{2+c+a^2}, v = \sqrt{2+a+b^2}:$$

$$(a+b+c)^2 \leq \left[\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \right] (2+b+c^2+2+c+a^2+2+a+b^2) \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{6+a+b+c+a^2+b^2+c^2} = \frac{(a+b+c)^2}{9+a+b+c}$$

Como $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ então:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 9 \Rightarrow$$

$$a+b+c \leq 3 \Rightarrow 9+a+b+c \leq 12$$

$$\text{Assim, tem-se que } \frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

46)

$$\text{Da identidade } \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} = 1 + \frac{(yz+zx+xy-3)^2}{(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2} \text{ segue}$$

$$\text{que } \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

47)

$$\text{Note que: } \frac{1}{1+a^2(b+c)} = \frac{1}{1+a(ab+ac)} = \frac{1}{1+a(3-bc)} = \frac{1}{1+3a-abc}$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$1 = \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \leq 1 \Rightarrow 1-abc \geq 0 \Rightarrow$$

$$3a+1-abc \geq 3a \Rightarrow \frac{1}{1+a^2(b+c)} = \frac{1}{3a+1-abc} \leq \frac{1}{3a}$$

$$\text{Analogamente: } \frac{1}{1+b^2(c+a)} \leq \frac{1}{3b} \text{ e } \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{3c}$$

Assim:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} = \frac{ab+ac+bc}{3abc} = \frac{1}{abc}$$

48)

Desigualdade de Cauchy: "Sejam $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ reais dados, não todos nulos ($n > 1$). Então: $|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$ "

$$\text{Fazendo } x_1 = \sqrt{\frac{1}{a_1}}, x_2 = \sqrt{\frac{1}{a_2}}, \dots, x_k = \sqrt{\frac{1}{a_k}}, \dots, x_n = \sqrt{\frac{1}{a_n}}$$

$$y_1 = \sqrt{\frac{a_1}{1^2}}, y_2 = \sqrt{\frac{a_2}{2^2}}, \dots, y_k = \sqrt{\frac{a_k}{k^2}}, \dots, y_n = \sqrt{\frac{a_n}{n^2}} \text{ temos:}$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \left(\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \right) \geq \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)^2$$

Como $\{a_k\}$ é uma sequência de inteiros positivos distintos, o maior valor

de $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ corresponde aos menores valores de $a_1, a_2, \dots, a_n$, que

são, colocando em ordem crescente, $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$. Portanto

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$\text{Então: } \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \right) \geq \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \right) \geq \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

49)

$$\text{I) } ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d)$$

II) Como $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, fazendo $x = a+c$ e $y = b+d$ temos

$$(a+c) + (b+d) \geq 2\sqrt{(a+c)(b+d)} = 2$$

Assim, segue que $a+b+c+d \geq 2$

Seja $S = a+b+c+d \Rightarrow$

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} = \frac{a^3}{S-a} + \frac{b^3}{S-b} + \frac{c^3}{S-c} + \frac{d^3}{S-d}$$

Definindo $f(x) = \frac{x^3}{S-x}$, pode-se demonstrar que $f'(x) > 0$ para $x > 0$, ou

seja, f é convexa.

Então, pela Desigualdade de Jensen:

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq 4 \left(\frac{\left(\frac{S}{4}\right)^3}{S - \frac{S}{4}} \right) = 4 \left(\frac{\frac{S^3}{4}}{\frac{3S}{4}} \right) =$$

$$= 4 \left(\frac{S^2}{3 \cdot 4^2} \right) \geq 4 \frac{4}{3 \cdot 4^2} = \frac{1}{3}$$

50)

Pela desigualdade de Cauchy:

$$(xr + ys + zt + wu)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)(r^2 + s^2 + t^2 + u^2)$$

$$\text{Fazendo } x = \sqrt{\frac{1}{b+2c+3d}}, y = \sqrt{\frac{1}{c+2d+3a}}, z = \sqrt{\frac{1}{d+2a+3b}},$$

$$w = \sqrt{\frac{1}{a+2b+3c}}, r = \sqrt{a(b+2c+3d)}, s = \sqrt{b(c+2d+3a)},$$

$$t = \sqrt{c(d+2a+3b)}, u = \sqrt{d(a+2b+3c)}:$$

$$(a+b+c+d)^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \right) 4(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} \quad (1)$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica sabe-se que

$$x^2 + y^2 \geq 2xy. \text{ Assim:}$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) =$$

$$= (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) + (b^2 + d^2) + (c^2 + d^2) \geq$$

$$\geq 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$\text{Portanto, tem-se que } \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+ad+bc+bd+cd} \geq \frac{2}{3} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) conclui-se que

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

51)

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$a^5 + b^5 = \left(\frac{a^5 + a^5 + a^5 + b^5 + b^5}{5} \right) + \left(\frac{a^5 + a^5 + b^5 + b^5 + b^5}{5} \right) \geq$$

$$\geq \sqrt[5]{a^5 a^5 a^5 b^5 b^5} + \sqrt[5]{a^5 a^5 b^5 b^5 b^5} = a^3 b^2 + a^2 b^3$$

Desta forma:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{a^3 b^2 + a^2 b^3 + ab} = \frac{1}{a^2 b + ab^2 + 1} = \frac{abc}{a^2 b + ab^2 + abc} =$$

$$= \frac{c}{a + b + c}$$

Analogamente pode-se demonstrar que

$$\frac{ac}{a^5 + c^5 + ac} \leq \frac{b}{a + b + c} \text{ e } \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a + b + c}$$

Somando estas três desigualdades encontra-se que:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1.$$

52)

Fazendo $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ e $c = \frac{z}{x}$ a desigualdade fica da forma:

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y} \right) \left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z} \right) \left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x} \right) \leq 1 \Rightarrow$$

$$(x + z - y)(x + y - z)(y + z - x) \leq xyz$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{(x + z - y) + (x + y - z)}{2} \geq \sqrt{(x + z - y)(x + y - z)} \Rightarrow$$

$$x \geq \sqrt{(x + z - y)(x + y - z)}$$

$$\text{Analogamente: } y \geq \sqrt{(x + y - z)(y + z - x)} \text{ e } z \geq \sqrt{(x + z - y)(y + z - x)}$$

Multiplicando-se obtém-se $(x + z - y)(x + y - z)(y + z - x) \leq xyz$.

53)

Sabe-se que $(n-1)^4 = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1$. Assim:

$$\sum n^4 - 4 \sum n^3 + 6 \sum n^2 - 4 \sum n + 4 = \sum (n-1)^4 \Rightarrow$$

$$4 \sum n^3 - \sum n^4 = 6 \sum n^2 - 4 \sum n - \sum (n-1)^4 + 4 \Rightarrow$$

$$4 \sum n^3 - \sum n^4 = 72 - 24 - \sum (n-1)^4 + 4 \Rightarrow$$

$$4 \sum n^3 - \sum n^4 = 52 - \sum (n-1)^4 \Rightarrow 36 \leq 52 - \sum (n-1)^4 \leq 48 \Rightarrow$$

$$4 \leq \sum (n-1)^4 \leq 16$$

Fazendo $x = a - 1$, $y = b - 1$, $z = c - 1$ e $t = d - 1$ tem-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4 \text{ e } x + y + z + t = 2$$

Assim, deve-se demonstrar que $4 \leq x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \leq 16$

Pela desigualdade de Cauchy tem-se que:

$$4(x^4 + y^4 + z^4 + t^4) \geq (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 \Rightarrow$$

$$4(x^4 + y^4 + z^4 + t^4) \geq 16 \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \geq 4$$

$$\text{Por outro lado: } 16 = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2) \Rightarrow 16 \geq x^4 + y^4 + z^4 + t^4$$

9.2. PARTE B

1) mínimo = -1 e máximo = 13/3

2) Dica: a) Aplique a desigualdade de Chebyshev; b) Aplique $MA \geq MG$.

3) Dica: Eleve ao quadrado e organize um quadrado perfeito.

4) Dica: $MA \geq MG$

5) Dica: $MA \geq MG$

6) Dica: Prove que se $\sqrt{x} > 1$.

7) Dica: Substitua y em função de x e monte uma inequação de 2º grau.

8) Dica: Substitua $a^3 < c^3$ e $b^3 < c^3$

9) Dica: $MA \geq MG$

10) Dica: Faça $y_i = 1/(1 + x_i)$ e depois use $MA \geq MG$.

11) Dica: Faça $x = 1/a$, $y = a/b$, $z = 1/c$ e depois $MA \geq MG$

12) Dica: Aplique a desigualdades das médias de potência.

13) Dica: Isole e para aplicar Cauchy.

14) Dica: Aplique $MA \geq MG$ para mostrar que $3a^4 + b^4 \geq 4a^3b$.

15) Dica: Aplique $MA \geq MG$ para mostrar que $x^8 + 1/x^4 \geq x^5 + 1/x$.

16) $n/(2n - 1)$. Dica: Desigualdade de Jensen.

17) Dica: Por $MA \geq MG$ encontre duas desigualdades, uma para $(x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2$ e outra para $1/x_1y_1 + \dots + 1/x_ny_n$ e depois multiplique as desigualdades.

18) 5¹⁵. Dica: Por Chebyshev $5 \sum_{\text{ciclica}} x_i^{2005} \geq \left(\sum_{\text{ciclica}} x_i^5 \right) \left(\sum_{\text{ciclica}} x_i^{2000} \right)$. Pela desigualdade entre as médias de potências tem-se que $\frac{\sum_{\text{ciclica}} x_i^{2000}}{5} \geq \left(\frac{\sum_{\text{ciclica}} x_i^{125}}{5} \right)^{16}$

19) Dica: Aplique a desigualdade de Cauchy e depois a desigualdade das médias de potências.

20) Dica: a) Desenvolva os quadrados e depois aplique $MA \geq MG$; b)

21) Dica: Aplique $MA \geq MG$.

22) Dica: Faça $a + b = x$, $a + c = y$ e $b + c = z$.

23) Dica. Use a desigualdade de Cauchy.

24) Dica: Use a fatoração de $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

25) Dica: Use que $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + 1)(x^2 + x + 1)$ e depois prove que $(a^3 + 1)(b^3 + 1)(c^3 + 1) \geq 8$.

26) Dica: Substitua $x + y = 1 - xy$ em $(x + y)^2 \geq 4xy$.

27) Dica: Prove que $4(a^2 + ab + b^2) \geq 3(a + b)^2$ e depois prove $9(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8(x + y + z)(yz + zx + xy)$.

28) Dica: Prove que $3abc - [a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c)] = abc - (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$.

29) Dica: Aplicando $MA \geq MG$ demonstre que $\frac{a^3}{x^2} + x + x \geq 3a$.

30) Dica: Por Chebyshev $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$

31) Dica. Aplicando Chebyshev prove que $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. Depois aplique Cauchy e prove que $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq \frac{1}{8}$.

32) $3\sqrt[3]{12}$. Dica: Aplique a desigualdade entre as médias de potências.

33) Dica: Por $MA \geq MG$ tem-se que $\frac{(x+y-1)^2}{z} + z \geq 2(x+y-1)$.

34) Dica. Deesenvolva a expressão e observe que $xy + xz + yz \leq x + y + z$.

35) Dica. Aplique a desigualdade de Cauchy.

36) Dica. Faça $2x = a + b$, $2y = b + c$, $2z = c + a$ e depois use $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$.

37) $3/4$. Dica: Faça $x^3 + y^3 + z^3 + 1 \geq \frac{(x+y+z)^3}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{36}}$

38) Dica: Demonstre que $(a^2 + b^4 + c^6)(a^6 + b^4 + c^2) \geq (a^4 + b^4 + c^4)^2$

39) Dica: Demonstre que $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{a+b}$.

40) Dica: Prove que $a^3 + 8 \geq 9a^{1/3}$ e depois aplique Jensen.

POLINÔMIOS

10.1. PARTE A

1)

Podemos escrever $P(x)$ da seguinte forma:

$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, onde x_i são as raízes de $P(x)$.

Como todos os x_i são negativos, fazendo $-x_i = y_i$, temos todos os y_i são positivos.

Desde que o último coeficiente de $P(x)$ é igual a 1, temos que $y_1 y_2 \dots y_n = 1$

Assim, $P(x) = (x + y_1)(x + y_2) \dots (x + y_n) \Rightarrow$

$P(1) = (1 + y_1)(1 + y_2) \dots (1 + y_n)$

Como $1 + y_i \geq 2(y_i)^{1/2}$, temos que

$P(1) \geq 2(y_1)^{1/2} \cdot 2(y_2)^{1/2} \dots 2(y_n)^{1/2} = 2^n (y_1 y_2 \dots y_n)^{1/2} \Rightarrow P(1) \geq 2^n$

2)

Aplicando $x = i \Rightarrow P(i) = (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)^n \Rightarrow$

$P(i) = \cos n\theta + i \cdot \sin n\theta$

Aplicando $x = -i \Rightarrow P(-i) = (\cos \theta - i \cdot \sin \theta)^n \Rightarrow$

$P(-i) = \cos n\theta - i \cdot \sin n\theta$

$P(x) = Q(x) \cdot (x^2 + 1) + ax + b \Rightarrow$

$\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta = b + i \cdot a$ e $\cos n\theta - i \cdot \sin n\theta = b - i \cdot a$

Assim, $a = \sin n\theta$ e $b = \cos n\theta \Rightarrow r(x) = \cos n\theta + x \cdot \sin n\theta$

3)

Como $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, as 2 raízes (a e b) de $x^2 + x + 1$ satisfazem $a^3 = 1$ e $b^3 = 1$

$P(a) = p_1(a^3) + a \cdot p_2(a^3) = p_1(1) + a \cdot p_2(1) = 0$

$P(b) = p_1(b^3) + b \cdot p_2(b^3) = p_1(1) + b \cdot p_2(1) = 0$

Como $a \neq 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow p_1(1) = 0$ e $p_2(1) = 0$

4)

Analisemos o seguinte polinômio: $Q(x) = xP(x) - 1$

Notemos que para $x = 1, 2, \dots, n+1$, temos que $Q(x) = 0$

Assim, as $n+1$ raízes de $Q(x)$ são $x = 1, 2, \dots, n+1 \Rightarrow$

$Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \dots (x-(n+1))$

Ou seja, $Q(n+2) = (n+2-1)(n+2-2)(n+2-3) \dots (n+2-(n+1)) \Rightarrow$

$Q(n+2) = (n+1)!$

Deste modo, $Q(n+2) = (n+2)P(n+2) - 1 \Rightarrow$

$P(n+2) = [(n+1)! + 1]/(n+2)$

5)

Se a equação $P(x) = Q(x)$ não tem solução, então temos

$P(x) > Q(x)$ ou $P(x) < Q(x)$

Suponhamos que $P(x) > Q(x)$ (*)

Fazendo $x = P(x)$ na expressão (*) temos $P(P(x)) > Q(P(x)) = P(Q(x))$

Fazendo $x = Q(x)$ na expressão (*) temos $P(Q(x)) = Q(P(x)) > Q(Q(x))$

Assim, $P(P(x)) > Q(P(x)) = P(Q(x)) = Q(P(x)) > Q(Q(x)) \Rightarrow$

$P(P(x)) > Q(Q(x))$

6)

Seja $P(x) = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n)$

Se k for divisível por 10, temos diretamente um polinômio que satisfaz o enunciado. Suponhamos que k não seja divisível por 10.

Como 2 divide $P(5)$ e 5 divide $P(2) \Rightarrow 10 \mid P(2)P(5)$

$P(5) = k(5 - x_1)(5 - x_2)(5 - x_3)(5 - x_4) \dots (5 - x_n)$

$P(2) = k(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)(2 - x_4) \dots (2 - x_n)$

$P(7) = k(7 - x_1)(7 - x_2)(7 - x_3)(7 - x_4) \dots (7 - x_n)$

Se existir um $x_i = 2$ e um $x_j = 5$, teremos diretamente uma resposta, pois $P(5) = 0$, $P(2) = 0$ e $P(7)$ vai possuir em sua decomposição um número 2 e um número 5, fazendo com que $10 \mid P(7)$.

Suponhamos então que nenhuma raiz seja igual a 2 e 5.

$\therefore P(5)P(2) = k^2[(5 - x_1)(2 - x_1)][(5 - x_2)(2 - x_2)] \dots [(5 - x_n)(2 - x_n)] \Rightarrow$

$P(5)P(2) = k^2(10 - 7x_1 + x_1^2)(10 - 7x_2 + x_2^2) \dots (10 - 7x_n + x_n^2) \Rightarrow$

$P(5)P(2) = k^2[10 - x_1(7 - x_1)][10 - x_2(7 - x_2)] \dots [10 - x_n(7 - x_n)] \Rightarrow$

$P(5)P(2) = k^2[10^n - 10^{n-1}(x_1(7 - x_1) + x_2(7 - x_2) + \dots + x_n(7 - x_n)) + \dots + x_1(7 - x_1)x_2(7 - x_2) \dots x_n(7 - x_n)]$

Como todos os termos com exceção do último são divisíveis por 10, temos que:

$10 \mid x_1(7 - x_1)x_2(7 - x_2) \dots x_n(7 - x_n) \Rightarrow$

$10 \mid x_1x_2 \dots x_n(7 - x_1)(7 - x_2) \dots (7 - x_n)$

Como nenhuma raiz é igual a 2 e 5, temos que

$10 \mid (7 - x_1)(7 - x_2) \dots (7 - x_n) \Rightarrow 10 \mid P(7)$

7)

Podemos conseguir os coeficientes A , B , C tais que se tenha identicamente $f(x) = Ax(x + 1) + Bx(x - 1) + C(x^2 - 1)$.

Particularizando para $x = 1, -1, 0$ e resolvendo o sistema fica:

$$f(x) = \frac{f(1)}{2}x(x+1) + \frac{f(-1)}{2}x(x-1) + f(0)(1-x^2) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Deduz-se que: $|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x(x+1)| + \frac{1}{2}|x(x-1)| + |1-x^2|$; como $-1 \leq x \leq 1$,

$1+x \geq 0$, $1-x \geq 0$ e $1-x^2 \geq 0$

$$\text{temos } |f(x)| \leq \frac{|x|}{2}(1+x) + \frac{|x|}{2}(1-x) + 1-x^2 = -x^2 + |x| + 1 = \frac{5}{4} - \left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4},$$

por outro lado, para $x \neq 0$, $g(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Então

$$g(x) = \frac{f(1)}{2}(1+x) + \frac{f(-1)}{2}(1-x) + f(0)(x^2-1)$$

válido para $-1 \leq x \leq 1$. Assim $|g(x)| \leq \frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} + 1-x^2 = 2-x^2 \leq 2$

8)

$$P(19) = 1 \Rightarrow a \cdot 19^3 + b \cdot 19^2 + c \cdot 19 + d = 1$$

$$P(62) = 2 \Rightarrow a \cdot 62^3 + b \cdot 62^2 + c \cdot 62 + d = 2$$

Subtraindo a segunda da primeira temos que

$$a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19) = 1 \Rightarrow$$

$$a(62 - 19)(62^2 + 62 \cdot 19 + 19^2) + b(62 - 19)(62 + 19) + c(62 - 19) = 1 \Rightarrow$$

$$43[a(62^2 + 19^2 + 62 \cdot 19) + b \cdot 81 + c] = 1$$

que não possui soluções inteiras para a, b, c , pois 43 não divide 1.

9)

Sejam $b_1, b_2, \dots, b_n$ as raízes de $p(x) = b$ e sejam $c_1, c_2, \dots, c_n$ as raízes de $p(x) = c$. Assumindo que $c > b$:

$$|\cot(\angle B_1 C_1 P) + \dots + \cot(\angle B_n C_n P)| = \frac{|(b_1 - c_1) + \dots + (b_n - c_n)|}{|b - c|} =$$

$$= \frac{|(b_1 + b_2 + \dots + b_n) - (c_1 + c_2 + \dots + c_n)|}{|b - c|} = \frac{|-a_{n-1} - (-a_{n-1})|}{|b - c|} = 0$$

O caso em que $c < b$ é análogo.

Assim, $\cot(\angle B_1 C_1 P) + \cot(\angle B_2 C_2 P) + \dots + \cot(\angle B_n C_n P) = 0$

10)

Raízes: r, s, t

$$-a = r + s + t \quad b = rs + rt + st \quad -c = rst$$

$$\therefore c = ba \Rightarrow rst = (r + s + t)(rs + rt + st) \Rightarrow$$

$$rst = r^2s + r^2t + rst + rs^2 + rst + s^2t + rst + rt^2 + st^2 \Rightarrow$$

$$rs(r + s) + rt(r + t) + st(s + t) + 2rst = 0 \Rightarrow$$

$$rs(r + s) + (r + s + t)(rt + st) = 0 \Rightarrow$$

$$rs(r + s) + (r + s)^2t + t^2(r + s) = 0 \Rightarrow (r + s)(rs + (r + s)t + t^2) = 0 \Rightarrow$$

$$(r + s)(b + t^2) = 0 \Rightarrow r = -s$$

11)

Analisemos a primeira equação:

$$\begin{aligned} & x(b + \alpha)(c + \alpha) + y(a + \alpha)(c + \alpha) + z(a + \alpha)(b + \alpha) = \\ & = (a + \alpha)(b + \alpha)(c + \alpha) \Rightarrow \\ & \alpha^2 x + \alpha x(b + c) + xbc + \alpha^2 y + \alpha y(a + c) + yac + \alpha^2 z + \alpha z(a + b) + zab = \\ & = \alpha^3 + \alpha^2(a + b + c) + \alpha(ab + ac + bc) + abc \Rightarrow \\ & \alpha^3 + \alpha^2(a + b + c - x - y - z) + \alpha(ab + ac + bc - xb - xc - ya - yc - za - \\ & - zb) + abc - xbc - yac - zab = 0 \end{aligned}$$

Como as outras equações diferenciam da primeira pela toca de α por β e de α por γ , podemos demonstrar que:

$$\begin{aligned} & \beta^3 + \beta^2(a + b + c - x - y - z) + \beta(ab + ac + bc - xb - xc - ya - yc - za - \\ & - zb) + abc - xbc - yac - zab = 0 \\ & \gamma^3 + \gamma^2(a + b + c - x - y - z) + \gamma(ab + ac + bc - xb - xc - ya - yc - za - zb) + \\ & + abc - xbc - yac - zab = 0 \end{aligned}$$

Assim, α , β e γ são raízes do polinômio:

$$p^3 + p^2(a + b + c - x - y - z) + p(ab + ac + bc - xb - xc - ya - yc - za - zb) + abc - xbc - yac - zab = 0$$

Ou seja: $\alpha + \beta + \gamma = a + b + c - x - y - z \Rightarrow$

$$x + y + z = a + \alpha + b + \beta + c + \gamma$$

12)

$$\begin{aligned} & p + q + r = b/a \quad pq + pr + qr = c/a \quad pqr = -d/a \\ & P + Q + R = \pi/4 \Rightarrow \operatorname{tg}(P + Q) = \operatorname{tg}(\pi/4 - R) \Rightarrow \\ & (\operatorname{tg} P + \operatorname{tg} Q)/(1 - \operatorname{tg} P \operatorname{tg} Q) = (1 - \operatorname{tg} R)/(1 + \operatorname{tg} R) \Rightarrow \\ & (p + q)/(1 - pq) = (1 - r)/(1 + r) \Rightarrow (p + q)(1 + r) = (1 - pq)(1 - r) \Rightarrow \\ & p + q + pr + qr = 1 - r - pq + pqr \Rightarrow \\ & p + q + r + pq + qr + pr - pqr = 1 \Rightarrow b/a + c/a + d/a = 1 \Rightarrow \\ & a = b + c + d \end{aligned}$$

13)

$$\begin{aligned} & \text{Raízes: } a, b, c \quad a + b + c = 0 \quad ab + ac + bc = p \quad abc = -q \\ & (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow 0 = a^2 + b^2 + c^2 + 2p \Rightarrow \\ & 2p = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow p < 0 \end{aligned}$$

14)

$$\begin{aligned} & x + 1/x = -1 \Rightarrow x^2 + 1 = -x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \\ & x^{1994} + 1/x^{1994} = x^2 + 1/x^2 \\ & \text{Se } x + 1/x = -1 \Rightarrow x^2 + 1/x^2 + 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 1/x^2 = -1 \Rightarrow \\ & x^{1994} + 1/x^{1994} = -1 \end{aligned}$$

15)

$$\begin{aligned} & a + b + c + d = 18 \quad ab + ac + ad + bc + bd + cd = k \\ & abc + abd + adc + bcd = -200 \quad abcd = -1984 \\ & \text{Como } ab = -32 \Rightarrow cd = 62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & abc + abd + adc + bcd = -200 \Rightarrow -32c - 32d + 62a + 62b = -200 \Rightarrow \\ & 16(c + d) - 31(a + b) = 100 \Rightarrow 16(18 - a - b) - 31(a + b) = 100 \Rightarrow \\ & 288 - 16(a + b) - 31(a + b) = 100 \Rightarrow 47(a + b) = 188 \Rightarrow \\ & a + b = 4 \quad e \quad c + d = 14 \\ & k = ab + ac + ad + bc + bd + cd = -32 + a(c + d) + b(c + d) + 62 = \\ & = 30 + (a + b)(c + d) = 30 + 4 \cdot 14 \Rightarrow k = 86 \end{aligned}$$

16)

$$\begin{aligned} & \text{Seja } y > 1 \text{ uma raiz de } q(y) = ay^2 + (c - b)y + (e - d) = 0 \text{ e } z^2 = y \text{ (} z > 1 \text{)} \Rightarrow \\ & q(z) = az^4 + (c - b)z^2 + (e - d) \end{aligned}$$

$$\text{Como } p(x) = ax^4 + (c - b)x^2 + (e - d) + bx^3 + dx - bx^2 - d \Rightarrow$$

$$p(x) = ax^4 + (c - b)x^2 + (e - d) + (x - 1)(bx^2 + d)$$

$$\text{Assim, aplicando } x = z \text{ e } x = -z \text{ temos } p(z) = (z - 1)(bz^2 + d) \text{ e}$$

$$p(-z) = -(z + 1)(bz^2 + d)$$

Como $z > 1$ temos $p(z)p(-z)$ é negativo, implicando que entre z e $-z$ existe uma raiz de $p(x)$

17)

$$\text{Pode-se fazer } P(x) = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \dots + \binom{x}{n} \Rightarrow$$

$$P(x) = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots + \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!}, \text{ onde}$$

verifica-se que o grau de $P(x)$ é definido pela última parcela e vale n .

$$\text{Assim: } P(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+1}{n} \Rightarrow$$

$$P(n+1) = \left[\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} \right] - \binom{n+1}{n+1} \Rightarrow$$

$$P(n+1) = 2^{n+1} - 1.$$

18)

Suponhamos que x_0 seja uma raiz, diferente de 3, do polinômio $p(x)$. Então: $(x_0 - 1)^2 p(x_0) = (x_0 - 3)^2 p(x_0 + 2)$.

$$\text{Como } p(x_0) = 0 \Rightarrow (x_0 - 3)^2 p(x_0 + 2) = 0 \Rightarrow p(x_0 + 2) = 0 \text{ pois } x_0 \neq 3$$

Assim $x_0 + 2$ é uma raiz de $p(x)$. De modo análogo, fazendo $x = x_0 + 2$ concluímos que $x_0 + 4$ é raiz de $p(x)$.

Fazendo $x = x_0 - 2$ também conclui-se que $x_0 - 2$ é raiz de $p(x)$.

• Deste modo, conclui-se que $p(x)$ possui infinitas raízes da forma $x = x_0 + 2k$, onde k é um inteiro.

Como o único polinômio que possui infinitas raízes é o polinômio indenticamente nulo, então $p(x)$ não possui raízes diferentes de $x = 3$. Deste modo $p(x) = A(x-3)^n$.

$$A(x-1)^2(x-3)^n = A(x-3)^2(x-1)^n \Rightarrow n=2 \Rightarrow p(x) = A(x-3)^2$$

19)

Suponhamos, sem perda de generalidades (pois a equação é simétrica), que a é racional.

$$a^2b^2(a^2b^2 + 4) = 2a^6 + 2b^6 \Rightarrow 2b^6 - (a^4)b^4 - (4a^2)b^2 + 2a^6 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^6 - \frac{a^2}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \frac{2}{a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1 = 0.$$

$$\text{Fazendo } x = \frac{b}{a} \text{ temos que } x^6 - \frac{a^2}{2}x^4 - \frac{2}{a^2}x^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

Desde que a é racional, então x é racional se e somente se b é racional.

A equação (1) é uma equação algébrica de coeficientes racionais. Se esta equação possui uma solução racional x , então esta solução é igual a $\pm p/q$, onde p é um divisor do coeficiente de x^0 e q é um divisor do coeficiente de x^6 . Como ambos coeficientes são iguais a 1, então as possíveis soluções racionais de (1) são ± 1 . Aplicando ± 1 em (1):

$$1 - \frac{a^2}{2} - \frac{2}{a^2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{2}{a^2} = 2 \Rightarrow a^4 + 4 = 4a^2 \Rightarrow$$

$$a^4 - 4a^2 + 4 = 0 \Rightarrow (a^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a \text{ não é racional, que é uma contradição.}$$

Portanto, x não pode ser racional, implicando que b não é racional.

20)

Vamos construir uma equação algébrica de 3º grau tal que suas raízes sejam a, b e c . Desde que $a + b + c = 0$, a equação é dada por $x^3 + qx + r = 0$, q e r inteiros.

Substituindo:

$$a^3 + qa + r = 0$$

$$b^3 + qb + r = 0$$

$$c^3 + qc + r = 0$$

Multiplicando cada equação por $2a, 2b$ e $2c$, respectivamente, e somando obtemos:

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 + 2q(a^2 + b^2 + c^2) + 2r(a + b + c) = 0 \Rightarrow 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = -2q(a^2 + b^2 + c^2).$$

Pelas relações de Girard sabemos que:

$$a + b + c = 0$$

$$ab + bc + ac = -q$$

$$abc = r$$

$$\text{Assim: } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac) = -2q$$

$$\text{Como } 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = -2q(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow$$

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = 4q^2 = (2q)^2.$$

21)

De posse de quatro números a, b, c e d , somente não poderíamos determinar a equação se ocorresse um dos três casos abaixo. Vamos analisar caso a caso:

i) 1º caso:

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ com raízes } c \text{ e } d$$

$$x^2 + cx + d = 0 \text{ com raízes } a \text{ e } b$$

$$(1) \quad c + d = -a$$

$$(2) \quad cd = b$$

$$(3) \quad a + b = -c$$

$$(4) \quad ab = d$$

$$\text{Subtraindo (1) de (3): } c + d - a - b = -a + c \Rightarrow b = d$$

ii) 2º caso:

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ raízes } c \text{ e } d$$

$$x^2 + ax + c = 0 \text{ raízes } b \text{ e } d$$

$$(1) \quad c + d = -a$$

$$(2) \quad cd = b$$

$$(3) \quad b + d = -a$$

$$(4) \quad bd = c$$

$$\text{Subtraindo (1) de (3): } b = c$$

iii) 3º caso:

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ raízes } c \text{ e } d$$

$$x^2 + cx + b = 0 \text{ raízes } a \text{ e } d$$

$$(1) \quad c + d = -a$$

$$(2) \quad cd = b$$

$$(3) \quad a + d = -c$$

$$(4) \quad ad = b$$

$$\text{Comparando (2) e (4): } a = c$$

Como em cada um dos três casos acima temos sempre que dois dos números a, b, c, d são iguais então sempre é possível determinar uma equação de 2º grau de posse de quatro números que podem assumir os valores das raízes e dos coeficientes da equação. Por exemplo, sendo os números x_1, x_2, x_3 e x_4 , e sendo x_i, x_j, x_k e x_l uma permutação destes números, basta organizar aos pares os números e fazer as contas: $x_i + x_j$

e $x_i x_j$. Quando acontecer que $x_i + x_j = -x_k$ e $x_i x_j = x_l$, então $a = x_k$ e $b = x_l$.

22)

Comparando os coeficientes de x^{20} temos que:

$$2^{20} - a^{20} = 1 \Rightarrow a = (2^{20} - 1)^{1/20}.$$

Aplicando $x = 1/2$, temos que: $-(ax + b)^{20} = (x^2 + px + q)^{10}$ e como o termo da direita é negativo e o da esquerda é positivo, temos que os dois devem ser iguais a 0.

$$(a/2 + b)^{20} = 0 \Rightarrow b = -a/2 \Rightarrow b = -[(2^{20} - 1)^{1/20}]/2$$

$$(x^2 + px + q)^{10} \Rightarrow 1/4 + p/2 + q = 0 \Rightarrow 2p + 4q = -1$$

Aplicando $x = 0$ temos que: $q^{10} = 1 - b^{20}$

$$b^{20} = (2^{20} - 1)/2^{20} \Rightarrow b^{20} = 1 - 1/2^{20} \Rightarrow 1 - b^{20} = 1/2^{20} \Rightarrow$$

$$q^{10} = 1/2^{20} \Rightarrow q = 1/4 \text{ ou } q = -1/4$$

$$\text{Se } q = 1/4 \Rightarrow p = -1 \text{ e se } q = -1/4 \Rightarrow p = 0$$

Calculando o coeficiente de x^{19} da expressão do lado esquerdo da igualdade temos:

$$-20 \cdot 2^{19} - 20 \cdot a^{19} \cdot b = 20[-2^{19} + a^{20}/2] = 20[-2^{19} + 2^{19} - 1/2] = -10$$

Do lado direito temos:

$$\text{Se } q = -1/4 \text{ e } p = 0 \Rightarrow 10(-1/4) = -5/2$$

$$\text{Se } q = 1/4 \text{ e } p = -1 \Rightarrow 10(-1) = -10$$

Assim, temos que $p = -1$ e $q = 1/4$.

Ou seja, temos que os valores são

$$a = (2^{20} - 1)^{1/20}, b = -[(2^{20} - 1)^{1/20}]/2, p = -1, q = 1/4.$$

23)

$$\text{Seja } g(x) = P(x) - 5 \Rightarrow g(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)h(x)$$

Como a, b, c, d, e são distintos então $x - a, x - b, x - c, x - d, x - e$ também são distintos.

$$\text{Logo, } |g(x)| = |(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)h(x)| \geq$$

$$\geq |(1)(-1)(2)(-2)(\pm 3)| = 12 \Rightarrow g(x) \leq -12 \text{ ou } g(x) \geq 12$$

$$\text{Como } P(x) = g(x) + 5 \Rightarrow P(x) \leq -7 \text{ ou } P(x) \geq 17$$

24)

O que o enunciado propõe é que existem inteiros c e k tais que:

$$f(c) = k^2 \text{ e } f(c + 1) = (k + 1)^2$$

$$\text{Assim: } k^2 = c^2 + ac + b \quad (1) \quad k^2 + 2k + 1 = c^2 + 2c + 1 + ac + a + b \quad (2)$$

$$\text{Subtraindo: } 2k = 2c + a \Rightarrow a = 2k - 2c \quad (3)$$

$$\text{Aplicando (3) em (1): } k^2 = c^2 + 2(k - c)c + b \Rightarrow$$

$$k^2 = c^2 - 2c^2 + 2kc + b \Rightarrow k^2 - 2kc + c^2 = b \Rightarrow$$

$$(k - c)^2 = b \Rightarrow b = a^2/4$$

$$\text{Portanto: } f(x) = x^2 + ax + b = x^2 + ax + a^2/4 = (x + a/2)^2$$

25)

i) Podemos montar os sistemas de equações:

$$a + b = 3c \text{ e } ab = -8d \Rightarrow b = 3c - a \Rightarrow a(3c - a) = -8d$$

$$c + d = 3a \text{ e } cd = -8b \Rightarrow d = 3a - c \Rightarrow c(3a - c) = -8b$$

ii) Subtraindo as duas primeiras equações de cada sistema:

$$a + b - c - d = 3c - 3a \Rightarrow d - b = 4(a - c)$$

iii) $3ac - a^2 = -8d$ e $3ac - c^2 = -8b \Rightarrow c^2 - a^2 = -8(d - b)$

$$\text{Assim, } c^2 - a^2 = -32(a - c) \Rightarrow (c + a)(c - a) = 32(c - a) \Rightarrow$$

$$c + a = 32$$

Somando as duas primeiras equações de cada sistema:

$$a + b + c + d = 3(a + c) \Rightarrow a + b + c + d = 96$$

iv) Vamos agora conferir se existem os números reais a, b, c e d

Multiplicando as duas últimas equações de cada sistema:

$$abcd = 64bd \Rightarrow ac = 64$$

$$a + c = 32 \text{ e } ac = 64 \Rightarrow a \text{ e } c \text{ são reais} \Rightarrow b \text{ e } d \text{ também são reais.}$$

26)

$$P(x) + 1 = (x - 1)^3 Q(x) \text{ e } P(x) - 1 = (x + 1)^3 R(x), \text{ onde}$$

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \text{ e } R(x) = ax^2 + px + q$$

$$P(x) + 1 = ax^5 + (b - 3a)x^4 + (c - 3b + 3a)x^3 + (-3c + 3b - a)x^2 +$$

$$+ (3c - b)x - c$$

$$P(x) - 1 = ax^5 + (p + 3a)x^4 + (q + 3p + 3a)x^3 + (3q + 3p + a)x^2 + (3c + p)x$$

$$+ q$$

Desta forma:

$$b - 3a = p + 3a$$

$$c - 3b + 3a = q + 3p + 3a$$

$$-3c + 3b - a = 3q + 3p + a$$

$$3c - b = 3q + p$$

$$-c = q + 2$$

$$\text{Resolvendo este sistema: } a = -3/8, b = -9/8, c = -1, p = 9/8 \text{ e } q = -1$$

$$\text{Assim: } P(x) = -3x^5/8 + 10x^3/8 - 15x/8$$

27)

Suponha que $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)(x^2 - p_1x + q_1)(x^2 - p_2x + q_2) \dots (x^2 - p_nx + q_n)$, onde os polinômios $x^2 - p_kx + q_k$ não possuem raízes reais. Logo:

$$1 > |P(i)| = |i - x_1| |i - x_2| \dots |i - x_m| |-1 - ip_1 + q_1| |-1 - ip_2 + q_2| \dots |-1 - ip_m + q_m|$$

$$\text{Como } |i - x_j| = 1 + x_j^2 > 1 \text{ então } |i - x_1| |i - x_2| \dots |i - x_m| > 1 \Rightarrow$$

$$|-1 - ip_1 + q_1| |-1 - ip_2 + q_2| \dots |-1 - ip_m + q_m| < 1 \Rightarrow$$

$$\text{existe } k \text{ tal que } |-1 - ip_k + q_k| < 1 \Rightarrow p_k^2 + (q_k - 1)^2 < 1$$

$$\text{Suponha que } a \pm bi \text{ são as raízes de } x^2 - p_kx + q_k \Rightarrow P(a + bi) = 0$$

Logo: $(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = x^2 - p_k x + q_k \Rightarrow$
 $p_k = 2a$ e $q_k = a^2 + b^2$
 Assim: $4a^2 + (a^2 + b^2 - 1)^2 < 1$

28)

Se A, B e C são ângulos de um triângulo então

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$$

Suponha que as raízes de $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ sejam

t, tg A, tg B, tg C. Logo:

$$t + \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} D = p \Rightarrow \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = p - t$$

$$t \cdot \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} D = s \Rightarrow \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = s/t$$

Assim, tem-se que $p - t = s/t$

$$q = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + t(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = q - s$$

$$r = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + t(\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C) \Rightarrow$$

$$r = p - t + t(q - s) \Rightarrow r = p - t + tq - ts \Rightarrow t = \frac{r - p}{q - s - 1}$$

29)

Das relações de Girard sobre $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$ sabe-se que

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = 5/4$$

$$\text{Se } \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1, \text{ sua média aritmética vale } \frac{\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8}}{4} = \frac{1}{4}$$

Por outro lado, a média geométrica destes números vale:

$$\sqrt[4]{\frac{r_1}{2} \cdot \frac{r_2}{4} \cdot \frac{r_3}{5} \cdot \frac{r_4}{8}} = \sqrt[4]{\frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{320}} = \sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{4}$$

Assim, a média aritmética é igual a média geométrica, implicando que os números devem ser iguais:

$$\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{4} = \frac{r_3}{5} = \frac{r_4}{8} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 1, r_3 = \frac{5}{4}, r_4 = 2$$

30)

$$x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow x^3 = 2 + 2\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{16} + 4 = 6 + 2\sqrt[3]{8}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 6 + 4x \Rightarrow$$

$$x^3 - 4x - 6 = 0$$

Sejam a, b, c as raízes de $x^3 - 4x - 6 = 0$

$$a + b + c = 0 \quad ab + ac + bc = -4 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 8$$

$$\text{Entretanto, sendo } a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow a^2 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{8} = 4 + \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$$

Como $2\sqrt[3]{2} > 2,5$ e $\sqrt[3]{4} > 1,5 \Rightarrow a^2$ é maior que 8 $\Rightarrow b^2 + c^2 < 0 \Rightarrow$
 b e c não são reais

31)

A equação $x^n = -4$ possui n raízes complexas distintas $z_1, z_2, \dots, z_n$, cada uma delas de módulos $4^{1/n}$.

Se $x^4 + 4 = F(x)G(x)$ então $z_1, z_2, \dots, z_k$ são raízes de F(x) e $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n$ são raízes de G(x):

$$F(x) = A(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_k) \text{ e } G(x) = B(x - z_{k+1})(x - z_{k+2}) \dots (x - z_n)$$

Comparando os coeficientes conclui-se que $AB = 1 \Rightarrow A = B = \pm 1$.

Os termos independentes de F(x) e G(x) valem $f_0 = (-1)^k A z_1 z_2 \dots z_k$ e $g_0 = (-1)^{n-k} B z_{k+1} z_{k+2} \dots z_n$ e devem ser números inteiros.

$$|f_0| = |z_1| |z_2| \dots |z_k| = 4^{\frac{k}{n}} \text{ e } |g_0| = |z_{k+1}| |z_{k+2}| \dots |z_n| = 4^{\frac{n-k}{n}} \Rightarrow$$

$$1 < f_0 < 4 \text{ e } 1 < g_0 < 4$$

Como $f_0 g_0 = 4$ então a única possibilidade é que $f_0 = g_0 = 2$, com $k = n/2$. Logo, tem-se que $F(x)G(x) = x^{2k} + 4$. Uma vez que $x^{2k} + 4 > 0$ então F(x) e G(x) são polinômios de coeficientes inteiros e com nenhuma raiz real. Assim, as raízes de F e G aparecem aos pares de raízes complexas conjugadas, fazendo com que F e G possuam grau par. Portanto, conclui-se que $n = 4t$.

$$\text{Para } n = 4t \text{ pode-se fazer } x^{4t} + 4 = (x^{2t} + 2x^t + 2)(x^{2t} - 2x^t + 2)$$

32)

Sejam w e w^2 as raízes $x^2 + x + 1 = 0$: $w^2 + w + 1 = 0$ e $w^3 = 1$

$$P(w) = (w^{1958} + w^{1957} + 2)^{1959} = [(w^3)^{652} \cdot w^2 + (w^3)^{652} \cdot w + 2]^{1959} =$$

$$= (w^2 + w + 2)^{1959} = (-1 + 2)^{1959} = 1$$

$$P(w^2) = (w^{3916} + w^{3914} + 2)^{1959} = [(w^3)^{1305} \cdot w + (w^3)^{1304} \cdot w^2 + 2]^{1959} =$$

$$= (w + w^2 + 2)^{1959} = (-1 + 2)^{1959} = 1$$

Por outro lado:

$$P(w) = 1 = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 + a_4 w + a_5 w^2 + \dots \text{ e}$$

$$P(w^2) = 1 = a_0 + a_1 w^2 + a_2 w + a_3 + a_4 w^2 + a_5 w + \dots$$

Somando estas duas equações:

$$2 = 2a_0 + a_1(w^2 + w) + a_2(w^2 + w) + 2a_3 + a_4(w^2 + w) + a_5(w^2 + w) + \dots \Rightarrow$$

$$1 = a_0 - a_1/2 - a_2/2 + a_3 - a_4/2 - a_5/2 + \dots$$

33)

$$p(x)^2 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)^2 =$$

$$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n+1} x^{n+1} + \dots + b_{2n} x^{2n} \Rightarrow$$

$$b_{n+1} = a_1 a_n + a_2 a_{n-1} + \dots + a_n a_1$$

Como $0 \leq a_i \leq a_0$ então $b_{n+1} \leq a_1 a_0 + a_2 a_0 + \dots + a_n a_0$

Somando tem-se que

$$2b_{n+1} \leq a_1(a_0 + a_n) + a_2(a_0 + a_{n-1}) + \dots + a_n(a_0 + a_1) \Rightarrow$$

$$2b_{n+1} \leq a_1(a_0 + a_1 + \dots + a_n) + a_2(a_0 + a_1 + \dots + a_n) + \dots + a_n(a_0 + a_1 + \dots + a_n) \Rightarrow$$

$$2b_{n+1} \leq (a_0 + a_1 + \dots + a_n)^2 = f(1)^2 \Rightarrow b_{n+1} \leq [f(1)^2]/2$$

34)

Note que se $\theta = r\pi/15$, $1 \leq r \leq 15$ e $\text{mdc}(r, 15) = 1$, então $\text{tg } 5\theta = \text{tg } r\pi/3$

Como $\text{mdc}(r, 15) = 1 \Rightarrow \text{tg } 5\theta = \pm \text{tg } 60^\circ \Rightarrow \text{tg}^2 5\theta = 3$

Seja $x = \text{tg } \theta \Rightarrow \text{tg } 2\theta = 2x/(1-x^2) \Rightarrow$

$\text{tg } 3\theta = \text{tg } (2\theta + \theta) = [x + 2x/(1-x^2)]/[1 - 2x^2/(1-x^2)] \Rightarrow$

$\text{tg } 3\theta = (x - x^3 + 2x)/(1 - x^2 - 2x^2) \Rightarrow \text{tg } 3\theta = (x^3 - 3x)/(3x^2 - 1)$

$\text{tg } 5\theta = \text{tg } (2\theta + 3\theta) =$

$= [2x/(1-x^2) + (x^3 - 3x)/(3x^2 - 1)]/[1 - 2x(x^3 - 3x)/(1-x^2)(3x^2 - 1)] \Rightarrow$

$\text{tg } 5\theta = [2x(3x^2 - 1) + (x^3 - 3x)(1 - x^2)]/[(1-x^2)(3x^2 - 1) - 2x(x^3 - 3x)] \Rightarrow$

$\text{tg } 5\theta = [6x^3 - 2x + x^3 - x^5 - 3x + 3x^3]/[3x^2 - 1 - 3x^4 + x^2 - 2x^4 + 6x^2] \Rightarrow$

$\text{tg } 5\theta = x[x^4 - 10x^2 + 5]/[5x^4 - 10x^2 + 1] \Rightarrow$

$\text{tg } 5\theta = x^2[x^4 - 10x^2 + 5]^2/[5x^4 - 10x^2 + 1]^2 \Rightarrow$

$x^2[x^4 - 10x^2 + 5]^2/[5x^4 - 10x^2 + 1]^2 = 3 \Rightarrow$

$x^2(x^8 - 20x^6 + 110x^4 - 100x^2 + 25) = 3(25x^8 - 100x^6 + 110x^4 - 20x^2 + 1) \Rightarrow$

$x^{10} - 95x^8 + 410x^6 - 430x^4 + 85x^2 - 3 = 0$

Dividindo por $x^2 - 3$ obtém-se como quociente

$x^8 - 92x^6 + 134x^4 - 28x^2 + 1$.

35)

Se $p(x)$ é um polinômio constante então $p(x) = 0$ ou $p(x) = 1$.

Suponhamos que $p(x)$ não é um polinômio constante.

Suponha que x_0 é uma raiz de $p(x)$, ou seja, $p(x_0) = 0 \Rightarrow$

$p(x_0^2 + x_0 + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = x_0^2 + x_0 + 1$ é também uma raiz de $p(x)$.

Por indução, se x_n é uma raiz real de $p(x)$ então $x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1$ também é uma raiz real de $p(x)$.

Desde que $x_{n+1} - x_n = x_n^2 + 1 > 0$ então a sequência x_n é uma sequência estritamente crescente, implicando que $p(x)$ possua infinitas raízes, que é impossível. Assim, $p(x) = 0$ não possui raízes reais.

Como os coeficientes de $p(x)$ são reais, suas raízes podem ser organizadas aos pares de raízes complexas conjugadas, fazendo com que n seja par.

Vamos provar que $p(x) = (x^2 + 1)^n$ satisfaz $p(x).p(x+1) = p(x^2 + x + 1)$:

$p(x)p(x+1) = (x^2 + 1)^n[(x^2 + 1)^n + 1] = (x^2 + 1)^{2n} + (x^2 + 1)^n + 1 =$

$= p(x^2 + x + 1)$

Vamos demonstrar que esta é a única solução.

Considere que $p(x)$ é um polinômio mônico de grau $2n$ e satisfaz

$p(x).p(x+1) = p(x^2 + x + 1)$

Seja $q(x) = p(x) - (x^2 + 1)^n \Rightarrow p(x) = q(x) + (x^2 + 1)^n$

Supondo que $\partial q = s$, nota-se que $s < 2n$.

$p(x)p(x+1) = [q(x) + (x^2 + 1)^n][q(x+1) + (x^2 + 2x + 2)^n]$

$p(x^2 + x + 1) = q(x^2 + x + 1) + [(x^2 + x + 1)^2 + 1]^n$

Como $p(x)p(x+1) = p(x^2 + x + 1) \Rightarrow$

$(x^2 + 1)^n q(x+1) + (x^2 + 2x + 2)^n q(x) = q(x^2 + x + 1) - q(x)q(x+1) \quad (1)$

Em (1) tem-se que:

$\partial[(x^2 + 1)^n q(x+1) + (x^2 + 2x + 2)^n q(x)] = 2n + s$ e

$\partial[q(x^2 + x + 1) - q(x)q(x+1)] \leq 2s$

Logo: $2n + s \leq 2s \Rightarrow s \geq 2n$, que é uma contradição

Assim, os polinômios que satisfazem $p(x).p(x+1) = p(x^2 + x + 1)$ são

$p(x) = 0$, $p(x) = 1$ e $p(x) = (x^2 + 1)^n$.

36)

$1 + x + x^2 + \dots + x^m = 0 \Rightarrow x^{m+1} = 0 \quad (x \neq 1) \Rightarrow$

$x_k = \cos \frac{2k\pi}{m+1} + i \cdot \text{sen} \frac{2k\pi}{m+1}$ para $k = 1, 2, \dots, m$

Para que $1 + x + x^2 + \dots + x^m$ divida $1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$ então as raízes de $1 + x + x^2 + \dots + x^m$ também devem ser raízes de $1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$.

$1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn} = 0 \Rightarrow \frac{x^{n(m+1)} - 1}{x^n - 1} = 1 \Rightarrow x^{n(m+1)} = 1 \quad (x^n \neq 1)$

Assim, de modo que $1 + x + x^2 + \dots + x^m$ divida $1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$

basta que $x_k^{n(m+1)} = 1$ e $x_k^n \neq 1$.

Note que $x_k^{n(m+1)} = 1$ sempre ocorre, uma vez que:

$(x_k)^{n(m+1)} = \left(\cos \frac{2k\pi}{m+1} + i \cdot \text{sen} \frac{2k\pi}{m+1} \right)^{n(m+1)} = \cos(2kn\pi) + i \cdot \text{sen}(2kn\pi) =$

$= \cos 0 + i \cdot \text{sen} 0 = 1$

Por outro lado: $x_k^n \neq 1 \Rightarrow$

$(x_k)^n = \left(\cos \frac{2k\pi}{m+1} + i \cdot \text{sen} \frac{2k\pi}{m+1} \right)^n = \cos \frac{2kn\pi}{m+1} + i \cdot \text{sen} \frac{2kn\pi}{m+1} \neq 1, k = 1, 2, \dots, m$

Se $\text{mdc}(n, m+1) = d \neq 1$ então $(m+1) = k \cdot n$ para algum $k \leq m$. Para este

k tem-se $(x_k)^n = 1$, que não é permitido. Assim, $1 + x + x^2 + \dots + x^m$ divide

$1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$ se e somente $\text{mdc}(n, m+1) = 1$.

37)

Suponha que $x^{13} + x + 90 = (x^2 - x + a)q(x)$, onde a é um número inteiro.

Como $q(x)$ é a divisão de dois polinômios mônicos, então $q(x)$ possui apenas coeficientes inteiros. Se $a \leq 0$ então $x^2 - x + a$ possui uma raiz r

positiva. Como as raízes de $x^2 - x + a$ também são raízes de $x^{13} + x + 90$, então r também é raiz de $x^{13} + x + 90$. Entretanto, como os coeficientes

de $x^{13} + x + 90$ são todos positivos, este polinômio não pode ter raízes positivas. Assim, conclui-se que $a > 0$.

$$x = -1: (a+2)q(-1) = 88 \quad (1)$$

$$x = 0: aq(0) = 90 \quad (2)$$

$$x = 1: aq(1) = 92 \quad (3)$$

De (1) e (2) conclui-se que a divide 2, ou seja, $a = 1$ ou $a = 2$. Se $a = 1$, então por (3) tem-se que 3 divide 88, que é falso. Se $a = 2$ tem-se que:

$$x^{13} + x + 90 = (x^2 - x + 2)(x^{11} + x^{10} - x^9 - 3x^8 - x^7 + 5x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 11x^2 + 23x + 45)$$

Logo, a única possibilidade é $a = 2$.

38)

Suponha que $p(x) = 0$ possui raízes x_1 e x_2 , ou seja, $p(x_1) = 0$ e $p(x_2) = 0$.

Desde que o coeficiente de x^2 em $p(x)$ é positivo então $p(x) \geq -\frac{\Delta}{4}$, onde

$$\Delta = a^2 - 4b.$$

Logo, $p(p(x)) = 0$ possui raízes reais se e somente se $x_1 \geq -\frac{\Delta}{4}$ e $x_2 \geq -\frac{\Delta}{4}$.

$$\text{Desta forma: } -a = x_1 + x_2 \geq -\frac{\Delta}{2} = \frac{4b - a^2}{2} \Rightarrow 4b \leq a^2 - 2a \quad (1)$$

Sejam y_1, y_2, y_3, y_4 as raízes de $p(p(x)) = 0$. Duas delas (y_1 e y_2) são raízes de $x^2 + ax + b - x_1 = 0$ e as outras duas raízes (y_3 e y_4) são raízes de $x^2 + ax + b - x_2 = 0$.

Assim, existem dois casos para as raízes que somam -1 :

$$\text{i) } y_1 + y_2 = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 4b \leq 1^2 - 2 \cdot 1 \Rightarrow b \leq -1/4$$

$$\text{ii) } y_1 + y_3 = -1 \Rightarrow y_1^2 + y_3^2 \geq 1/2$$

Como $y_1^2 + ay_1 + b - x_1 = 0$ e $y_3^2 + ay_3 + b - x_2 = 0$, somando estas duas

$$\text{equações: } y_1^2 + y_3^2 + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{y_1^2 + y_3^2}{2} \leq -\frac{1}{4}$$

39)

$$x^2 + x + 1 \mid g(x^2 + x + 1) \Rightarrow g(x) = xg_1(x)$$

$$x^2 - x + 1 \mid f(x^2 - x + 1) \Rightarrow f(x) = xf_1(x)$$

Substituindo na equação original tem-se: $f_1(x^2 - x + 1) = g_1(x^2 + x + 1)$

$$\text{Fazendo } x \rightarrow -1 - x: f_1(x^2 + 3x + 3) = g_1(x^2 + x + 1) = f_1(x^2 + x + 1) \Rightarrow$$

$$f_1\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) = f_1\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Fazendo } h(x) = f_1\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \text{ tem-se que } h(x+2) = h(x), \text{ ou seja, } h \text{ é}$$

um polinômio periódico e portanto constante. Conclui-se então que f_1 e g_1 são constantes, fazendo com que $f(x) = g(x) = kx$.

40)

$$\text{i) } x = 0 \Rightarrow P(0) = 0;$$

$$\text{ii) } x = 1 \Rightarrow P(1) = 0;$$

$$\text{iii) } x = -1 \Rightarrow P(-1) = 0$$

Se $P(x)$ possuir outra raiz t além de 0, 1 e -1 então

$$P(t^2) = t^2(t^2 + 1)P(t) \Rightarrow t^2 \text{ também raiz de } P(x)$$

Continuando com este procedimento pode-se encontrar infinitas raízes para P , o que é impossível.

Logo, conclui-se que as únicas raízes de P são 0, 1 e -1 .

De $P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x)$ conclui-se que $P(x) = P(-x)$, ou seja, $P(x)$ é uma função polinomial par. Além disso, se $\partial P = n$:

$$\partial[P(x^2)] = \partial[x^2(x^2 + 1)P(x)] \Rightarrow 2n = n + 4 \Rightarrow n = 4$$

Todas as funções polinomiais pares de grau 4 com raízes 0, 1 e -1 possuem a forma $P(x) = kx^2(x^2 - 1)$.

$$\text{Como } P(2) = 12 \text{ então } k = 1 \Rightarrow P(x) = x^4 - x^2.$$

41)

Notemos inicialmente que $x = 0$ é uma solução da equação dada.

Devido aos sinais, podemos concluir também que, após desenvolvermos os dois lados da equação, os termos de expoente par em x possuem o mesmo coeficiente nos dois lados da igualdade, implicando que a equação fica reduzida aos termos de expoente ímpar em x .

Façamos $a_2 = -a_1$ e $a_4 = -a_3$, onde a_1 e a_3 são números reais distintos não-nulos.

Deste modo, a equação fica da forma:

$$(x - a_1)(x + a_1)(x - a_3)(x + a_3) \dots (x - a_{10}) = (x + a_1)(x - a_1)(x + a_3)(x - a_3) \dots (x - a_{10})$$

Portanto, temos que $a_1, -a_1, a_3$ e $-a_3$ são raízes reais distintas da equação.

Eliminando estes termos comuns, temos que a equação fica:

$$(x - a_5)(x - a_6)(x - a_7)(x - a_8)(x - a_9)(x - a_{10}) = (x + a_5)(x + a_6)(x + a_7)(x + a_8)(x + a_9)(x + a_{10})$$

Desenvolvendo:

$$x^6 - Ax^5 + Bx^4 - Cx^3 + Dx^2 - Ex + F =$$

$$= x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F \Rightarrow$$

$Ax^5 + Cx^3 + Ex = 0 \Rightarrow x(Ax^4 + Cx^2 + E) = 0$, comprovando que $x = 0$ é uma solução real da equação. As outras 4 raízes saem da equação $Ax^4 + Cx^2 + E = 0$, que é uma equação biquadrada.

Pelas Relações de Girard, sabemos que, em relação aos termos a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 e a_{10} :

- A é a soma destes termos;

- C é a soma da multiplicação 3 a 3 destes termos;

– E é a soma da multiplicação 5 a 5 destes termos.

Portanto, se a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 e a_{10} forem todos números reais positivos, então $A > 0$, $C > 0$ e $E > 0$, implicando que a equação $Ax^4 + Cx^2 + E = 0$ não possua raízes reais, pois é uma equação biquadrada com todos os coeficiente reais e estritamente positivos.

Resumindo, a equação possui exatamente 5 raízes reais se fizermos $a_2 = -a_1$ e $a_4 = -a_3$, (a_1 e a_3 números reais distintos não-nulos) e se a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 e a_{10} forem todos números reais positivos.

42)

Pelo enunciado $P(Q(-22)) = 0$, $P(Q(7)) = 0$ e $P(Q(13)) = 0$.

Sejam x_1 e x_2 as duas raízes de $P(x)$, ou seja, $P(x_1) = 0$ e $P(x_2) = 0$.

Seja r a quarta raiz de $P(Q(x)) = 0$.

Portanto, temos 7 possibilidades:

i) $Q(-22) = Q(7) = Q(13) = x_1$

Construindo a equação do 2º grau $R(x) = Q(x) - x_1$, temos que $R(-22) = R(7) = R(13) = 0$, implicando que $R(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$Q(x) = x_1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, que não é do 2º grau.

ii) $Q(-22) = Q(7) = Q(r) = x_1$

Se $r \neq -22$ e $r \neq 7$ temos novamente que $Q(x) = x_1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, contrariando o enunciado.

iii) $Q(7) = Q(13) = Q(r) = x_1$

Se $r \neq 7$ e $r \neq 13$ temos novamente que $Q(x) = x_1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, contrariando o enunciado.

iv) $Q(-22) = Q(13) = Q(r) = x_1$

Se $r \neq -22$ e $r \neq 13$ temos novamente que $Q(x) = x_1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, contrariando o enunciado.

v) $Q(-22) = Q(7) = x_1$ e $Q(13) = Q(r) = x_2$

Construindo a equação do 2º grau $R(x) = Q(x) - x_1$, temos que

$$R(-22) = R(7) = 0 \Rightarrow R(x) = k_1(x + 22)(x - 7) \Rightarrow$$

$$Q(x) = k_1(x + 22)(x - 7) + x_1$$

$$Q(13) = x_2 \Rightarrow x_2 = k_1(13 + 22)(13 - 7) + x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 = 210k_1$$

$$Q(r) = x_2 \Rightarrow x_2 = k_1(r + 22)(r - 7) + x_1 \Rightarrow 210k_1 = k_1(r^2 + 15r - 154) \Rightarrow$$

$$r^2 + 15r - 364 = 0 \Rightarrow r = 13 \text{ ou } r = -28$$

vi) $Q(7) = Q(13) = x_1$ e $Q(-22) = Q(r) = x_2$

Construindo a equação do 2º grau $R(x) = Q(x) - x_1$, temos que

$$R(7) = R(13) = 0 \Rightarrow R(x) = k_1(x - 7)(x - 13) \Rightarrow$$

$$Q(x) = k_1(x - 7)(x - 13) + x_1$$

$$Q(-22) = x_2 \Rightarrow x_2 = k_1(-22 - 7)(-22 - 13) + x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 = 1015k_1$$

$$Q(r) = x_2 \Rightarrow x_2 = k_1(r - 7)(r - 13) + x_1 \Rightarrow 1015k_1 = k_1(r^2 - 20r + 91) \Rightarrow$$

$$r^2 - 20r - 924 = 0 \Rightarrow r = -22 \text{ ou } r = 42$$

vii) $Q(-22) = Q(13) = x_1$ e $Q(7) = Q(r) = x_2$

Construindo a equação do 2º grau $R(x) = Q(x) - x_1$, temos que

$$R(-22) = R(13) = 0 \Rightarrow R(x) = k_1(x + 22)(x - 13) \Rightarrow$$

$$Q(x) = k_1(x + 22)(x - 13) + x_1$$

$$Q(7) = x_2 \Rightarrow x_2 = k_1(7 + 22)(7 - 13) + x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 = -174k_1$$

$$Q(r) = x_2 \Rightarrow x_2 = k_1(r + 22)(r - 13) + x_1 \Rightarrow -174k_1 = k_1(r^2 + 9r - 286) \Rightarrow$$

$$r^2 + 9r - 112 = 0 \Rightarrow r = 7 \text{ ou } r = -16$$

Desta forma, a quarta raiz da equação $P(Q(x)) = 0$ pode ser qualquer um dos valores: $x = \{-22, 7, 13, -28, 42, -16\}$

10.2. PARTE B

1) Dica: Perceba que cada raiz x_i de $x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$ satisfaz $x_i^{10} = 1$, com $x_i \neq 1$.

2) Dica: Mostre que os dois polinômios possuem as mesmas raízes.

3) Dica: Demonstre que $p(x) \mid q(x^2)$.

4) $P(x) = (x^2 + 1)^2 + 1$. Dica: Demonstre que $P(x) = F(x) - [(x^2 + 1)^2 + 1]$ possui infinitas raízes.

5) $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 8)q(x)$. Dica: Substitua valores de x que zeram a equação.

6) Dica: Se $p(x) = x$ não possui solução real então $p(x) > x$ ou $p(x) < x$.

7) $a = -1$ e $b = -2$ ou $a = 2$ e $b = -14$

8) $\sqrt[3]{-\frac{n}{2}}$ e $-5\sqrt[3]{-\frac{n}{2}}$ (multiplicidade 2)

9) a) $k = 2$; b) n deixa resto 2 na divisão por 3.

10) Dica: Use as relações de Girard.

- 11)** Dica: Mostre que se $P(a) = b$ e $P(b) = c$ então $a - b \mid b - c$.
- 12)** Dica: Use indução finita.
- 13)** -7 .
- 14)** b) $3\pi/4$.
- 15)** Dica: Use a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.
- 16)** Dica: Analise o menor valor possível do produto de 13 inteiros distintos.
- 17)** Dica: Mostre que se r, s, t são as raízes da 1ª equação, $(r + s)/2$, $(r + t)/2$ e $(s + t)/2$ são as raízes da 2ª equação.
- 18)** $(99, 9)$, $(80, 10)$, $(90, 12)$, $(88, 12)$. Dica: Use as relações de Girard.
- 19)** Dica: Use a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.
- 20)** $2011, -2009, 2013, -2011, 3$ ou -1 . Dica: Analise a equação $(x-1)(x-r)R(x) = -2011$
- 21)** Dica: Relações de Girard.
- 22)** Todas as raízes são iguais a -1 .
- 23)** Dica: Relacione a, b, c e d em função de $P(1)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1/2)$ e $P(-1/2)$.
- 24)** $a = 170$.
- 25)** $p^2 = 2q + 2r + 1$. Dica: Use o fato que, se A, B e C são ângulos de um triângulo, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$.
- 26)** 3338
- 27)** Dica: Prove que c é a raiz comum das equações.
- 28)** Dica: Fatore $P(x_1^3) - P(x_2^3)$.
- 29)** Dica: Use redução ao absurdo.

- 30)** Dica: Suponha que exista n tal que $Q(P(n)) = 1$ e chegue a conclusão que $Q(2m)$ é ímpar.
- 31)** Dica. Aplique a desigualdade de Cauchy.
- 32)** Dica: Substitua a na equação e mostre que $3 < a^6 < 4$.
- 33)** Dica: Mostre que $G(x)$ não é divisível por nenhum polinômio da forma $x^n - a$, com $1 \leq n \leq 4$ e $a = \pm 1$ ou $a = \pm 2$.
- 34)** Dica: Prove que $41 \mid p(a + 41m)$ e $49 \mid p(b + 49n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.
- 35)** Dica: Veja a solução do problema resolvido 7.

SEQUÊNCIAS

11.1. PARTE A

1)

$$a_{k+1} + \frac{1}{2} = 3 \left(a_k + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow a_k + \frac{1}{2} = \left(a_0 + \frac{1}{2} \right) 3^k \Rightarrow a_{155} + \frac{1}{2} = \frac{3^{155}}{2} \Rightarrow$$

$$a_{155} = \frac{3^{155} - 1}{2}$$

$$\text{Como } 3^5 = 243 = 11 \cdot 22 + 1 \Rightarrow 3^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{(5)31} \equiv 1^{31} \pmod{11} \Rightarrow 3^{155} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 11 \mid a_{155}$$

2)

Racionalizando temos:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n^2 + 2n + 1) - (n+1)n^2} =$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{Assim: } a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = 1 - 1/10 = 0,9$$

3)

Multiplicando a equação de x_{n+2} por x_{n+1} , temos $x_{n+2}x_{n+1} = x_{n+1}x_n - 1$.Fazendo $y_n = x_{n+1}x_n$, então: $y_{n+1} = y_n - 1$, onde

$$y_1 = x_2x_1 = 19 \cdot 97 = 1843$$

Assim, como cada termo de y_n é igual ao anterior menos um, temos que:

$$y_2 = y_1 - 1, y_3 = y_2 - 1 = y_1 - 2, y_4 = y_3 - 1 = y_1 - 3, \dots,$$

$$y_n = y_1 - (n-1) \Rightarrow y_n = 1843 - (n-1)$$

$$\text{Assim: } y_{1844} = 1843 - 1844 - 1 \Rightarrow y_{1844} = 0 \Rightarrow x_{1845}x_{1844} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1844} = 0$$

4)

Sabe-se que uma sequência dada pela recorrência $x_n = a \cdot x_{n-1} + b \cdot x_{n-2}$ possui termo geral dado por

$$x_n = \frac{(x_1 - \beta \cdot x_0)}{\alpha - \beta} \alpha^n + \frac{(\alpha \cdot x_0 - x_1)}{\alpha - \beta} \beta^n,$$

onde α e β são as raízes da equação característica $x^2 = ax + b$.

Note que as duas sequências possuem o mesmo polinômio característico:

 $x^2 = 4x - 1$, ou seja, para as duas sequências tem-se as mesmas raízes α e β tais $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ e $\beta = 2 - \sqrt{3}$.

$$\text{Logo, tem-se que } x_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \text{ e } y_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}{2}$$

$$3x_n^2 + 1 = 3 \left[\frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \right]^2 + 1 = \frac{(2 + \sqrt{3})^{2n} + (2 - \sqrt{3})^{2n} - 2}{4} + 1 =$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{3})^{2n} + (2 - \sqrt{3})^{2n} + 2}{4} \Rightarrow 3x_n^2 + 1 = \left[\frac{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}{2} \right]^2 = y_n^2$$

5)

$$\text{Fazendo } b_n = \frac{1}{a_n}: \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{\frac{1}{b_n}}{1 + \frac{n}{b_n}} \Rightarrow \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_n + n} \Rightarrow b_{n+1} = b_n + n \Rightarrow$$

$$b_1 - b_0 = 0$$

$$b_2 - b_1 = 1$$

$$b_3 - b_2 = 2$$

...

$$b_n - b_{n-1} = n - 1$$

$$\text{Somando: } b_n - b_0 = n(n-1)/2 \Rightarrow b_n = 1 + (n^2 - n)/2 \Rightarrow$$

$$b_n = (n^2 - n + 2)/2 \Rightarrow a_n = \frac{2}{n^2 - n + 2}$$

6)

$$n \rightarrow n+1: a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1 \Rightarrow a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = 1 \Rightarrow a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} =$$

$$= a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1}^2 + a_{n-1}a_{n+1} = a_n^2 + a_n a_{n+2} \Rightarrow$$

$$a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n(a_n + a_{n+2}) \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_{n+2} + a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n-1}}$$

$$\text{Logo: } \frac{a_{n+1}}{a_{n+2} + a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n + a_{n-2}} = \dots = \frac{a_1}{a_2 + a_0} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\alpha a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \alpha a_n - a_{n-1}$$

7)

Podemos escrever a equação de a_n da seguinte forma:

$$a_n/a_{n-1} = 6a_{n-1}/a_{n-2} - 8a_{n-2}/a_{n-3}$$

$$\text{Fazendo } b_n = a_n/a_{n-1} \text{ temos que: } b_n = 6b_{n-1} - 8b_{n-2}, \text{ com } b_2 = 2,$$

$$b_3 = 12.$$

$$\therefore x^2 = 6x - 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 2 \text{ e } x = 4 \Rightarrow b_n = A \cdot 2^n + B \cdot 2^{2n}$$

$$\therefore b_2 = 2 \Rightarrow 2 = 4A + 16B \quad \therefore b_3 = 12 \Rightarrow 12 = 8A + 64B \Rightarrow$$

$$A = -1/2 \text{ e } B = 1/4$$

$$\therefore b_n = 2^{2n-2} - 2^{n-1} \Rightarrow b_n = 2^{n-1}(2^{n-1} - 1) \Rightarrow a_n = a_{n-1}[2^{n-1}(2^{n-1} - 1)]$$

$$\text{Deste modo: } a_n = 2^{n(n-1)/2}(2^{n-1} - 1)(2^{n-2} - 1)(2^{n-3} - 1)\dots(2 - 1)$$

Seja $n = 2^k \cdot m$, onde m é ímpar

Notemos inicialmente que $k \leq n \leq n(n-1)/2$

Como $\phi(m) \leq m-1$ então existe um i tal que $i \leq m-1$ tal que $m \mid 2^i - 1$, bastando para isso fazer $i = \phi(m)$

8)

$$\text{Seja equação } a_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} = x_n + y_n + z_n + 1/x_n + 1/y_n + 1/z_n \Rightarrow$$

$$a_{n+1}^2 = (x_n + y_n + z_n + 1/x_n + 1/y_n + 1/z_n)^2 \Rightarrow$$

$$a_{n+1}^2 = (x_n + y_n + z_n)^2 + (1/x_n + 1/y_n + 1/z_n)^2 + 2(x_n + y_n + z_n)(1/x_n + 1/y_n + 1/z_n) \Rightarrow$$

$$a_{n+1}^2 > (x_n + y_n + z_n)^2 + 18 \Rightarrow a_{n+1}^2 - a_n^2 > 18$$

$$\text{Como } a_1 = x_1 + 1/x_1 + y_1 + 1/y_1 + z_1 + 1/z_1 \Rightarrow a_1 > 6 \Rightarrow a_1^2 > 36$$

$$a_2^2 - a_1^2 > 18$$

$$a_3^2 - a_2^2 > 18$$

$$a_4^2 - a_3^2 > 18$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_n^2 - a_{n-1}^2 > 18$$

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 > 18$$

$$\text{Somando temos que } a_{n+1}^2 > a_1^2 + 18n \Rightarrow a_{n+1}^2 > 18n + 36 \Rightarrow$$

$$a_{200}^2 > 3618 \Rightarrow a_{200} > 60 \Rightarrow$$

$$x_{200} + y_{200} + z_{200} > 60 \Rightarrow \text{um dos números é maior que 20.}$$

9)

Para $n = 0$ tem-se que $u_0 = 1 \leq 4^0$. Para $n = 1$ tem-se que $u_1 = 3 \leq 4^1$.

Suponhamos que exista $k \geq 0$ tal que $u_0 \leq 4^0$, $u_1 \leq 4^1$, $u_2 \leq 4^2$, ..., $u_k \leq 4^k$.

$$u_{k+1} = 2u_k + 7u_{k-1} \leq 2 \cdot 4^k + 7 \cdot 4^{k-1} = 8 \cdot 4^{k-1} + 7 \cdot 4^{k-1} = 15 \cdot 4^{k-1} < 16 \cdot 4^{k-1} = 4^{k+1}.$$

10)

Inicialmente notemos que todos os termos da sequência são positivos.

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{10x_n} = \frac{x_n^3}{10} + \frac{3}{10x_n} + \frac{3}{10x_n} + \frac{3}{10x_n} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x_n^3}{10} \cdot \frac{3}{10x_n} \cdot \frac{3}{10x_n} \cdot \frac{3}{10x_n}} = 4\sqrt[4]{\frac{3^3}{10^4}} > \frac{4 \cdot 2}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$x_n > 4/5$$

Vamos provar agora que $x_n \leq 5/4$. Observemos que $x_2 = 5/4$.

Determinemos quando $x_{n+1} \leq x_n$:

$$x_n \geq (x_n^4 + 9)/(10x_n) \Rightarrow x_n^4 - 10x_n^2 + 9 \leq 0 \Rightarrow (x_n^2 - 1)(x_n^2 - 9) \leq 0 \Rightarrow$$

$$1 \leq x_n^2 \leq 9 \Rightarrow 1 \leq x_n \leq 3$$

$$\text{Como } x_2 = 5/4 > 1 \Rightarrow x_3 \leq x_2 = 5/4$$

$$\text{Se } x_n < 1, \text{ então } x_{n+1} = (x_n^4 + 9)/(10x_n) < (1 + 9)/(10x_n) = 1/x_n < 5/4$$

11)

Calculemos os primeiros termos da sequência x_n :

$$x_0 = x_0, x_1 = x_1, x_2 = (1 + x_1)/x_0, x_3 = (1 + x_0 + x_1)/x_0x_1, x_4 = (1 + x_0)/x_1,$$

$$x_5 = x_0, x_6 = x_1, \dots$$

Notemos que depois de x_5 temos uma repetição, formando uma sequência de período 5.

$$\text{Como } 1998 = 5k + 3, \text{ temos que } x_{1998} = x_3 = (1 + x_0 + x_1)/x_0x_1$$

12)

Notemos que $a_2 = 2$

$$a_{n+1} = a_n + 1/a_n^2 \Rightarrow a_{n+1}^3 = a_n^3 + 3 + 3/a_n^3 + 1/a_n^6 > a_n^3 + 3 \Rightarrow$$

$$a_{n+1}^3 - a_n^3 > 3$$

Notemos que $a_2 = 2$, ou seja, $a_2^3 - a_1^3 = 7$

$$a_2^3 - a_1^3 = 7$$

$$a_3^3 - a_2^3 > 3$$

$$a_4^3 - a_3^3 > 3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_n^3 - a_{n-1}^3 > 3$$

$$a_{n+1}^3 - a_n^3 > 3$$

$$\text{Somando temos que } a_{n+1}^3 > 3n + 4 \Rightarrow a_{9000}^3 > 27001 \Rightarrow a_{9000} > 30$$

13)

Calculemos alguns termos da sequência:

$$a_1 = 2^3 \text{ e } a_2 = 2 \cdot 3^2$$

$$a_3 = a_2 \cdot a_1 = 2^4 \cdot 3^2 \quad a_4 = a_3 \cdot a_2 = 2^5 \cdot 3^4 \quad a_5 = a_4 \cdot a_3 = 2^9 \cdot 3^6 \quad a_6 = a_5 \cdot a_4 = 2^{14} \cdot 3^{10}$$

$$a_7 = a_6 \cdot a_5 = 2^{23} \cdot 3^{16}$$

Notemos que os expoentes de 3 sempre são pares, e os expoentes de 2 são pares quando n é múltiplo de 3.

Assim, pode-se esperar que a_{3k} ($k = 1, 2, 3, \dots$) seja sempre um quadrado perfeito.

Os expoentes de 2 formam a seguinte sequência: 4, 5, 9, 14, 23, 37, ...,

formando a sequência recursiva: $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ $n \geq 4$

Provemos por indução que b_n é par se e somente se $n = 3k$:

i) vale para $k = 1$, pois $b_3 = 4$, $b_4 = 5$ e $b_5 = 9$

ii) Suponhamos que seja válido para os inteiros entre 1 e k , ou seja, que

b_{3k} é par, b_{3k-1} é ímpar e b_{3k-2} é ímpar

iii) Provemos para $k + 1$:

$b_{3k+1} = b_{3k} + b_{3k-1}$ é ímpar pois é soma de um número par e um ímpar

$b_{3k+2} = b_{3k+1} + b_{3k}$ é ímpar pois é soma de um número par e um ímpar

$b_{3k+3} = b_{3k+2} + b_{3k+1}$ é par pois é soma de dois números ímpares

14)

a) Suponha, por absurdo, que $|a_1| > 1$.A sequência recorrente $a_{n+1} = 2a_1a_n - a_{n-1}$ possui equação característica

$$x^2 = 2a_1x - 1, \text{ cujas raízes são } x_1 = a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1} \text{ e } x_2 = a_1 - \sqrt{a_1^2 - 1}.$$

Como $|a_1| > 1$ então x_1 e x_2 são números reais tais que $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$.Assim, o termo geral é dado por $a_n = Ax_1^n + Bx_2^n \Rightarrow$

$$a_n = A(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1})^n + B(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 1})^n$$

Fazendo $n = 0$: $A + B = 0$ Fazendo $n = 1$: $A + B = 1$

$$\text{Assim, segue que } A = B = 1/2 \Rightarrow a_n = \frac{(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1})^n + (a_1 - \sqrt{a_1^2 - 1})^n}{2} \Rightarrow$$

 $a_n > 0$, para todo $n \geq 0$.Isto contradiz o fato de que $a_{499} = 0$. Logo, conclui-se que $|a_1| \leq 1$.b) Se $a_1 = 1$ então $a_n = 1$, $n \geq 0$, ou seja, $a_{1996} = 1$.Se $|a_1| < 1$ então x_1 e x_2 são números complexos conjugados de módulo igual a 1: $x_1 = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$ e $x_2 = \cos \theta - i \cdot \sin \theta$

$$\text{Assim: } a_n = \frac{x_1^n + x_2^n}{2} = \frac{\cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i \cdot \sin(n\theta)}{2} = \cos(n\theta)$$

$$\text{Como } a_{499} = 0 \text{ então } \cos(499\theta) = 0 \Rightarrow 499\theta = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$1996\theta = \pm 2\pi + 8k\pi \Rightarrow \cos(1996\theta) = \cos(\pm 2\pi + 8k\pi) \Rightarrow a_{1996} = 1$$

15)

Fazendo $x_n = 1/a_n$ tem-se que $x_n - x_{n-1} = 2n \Rightarrow x_n - x_1 = (2+n)(n-1) \Rightarrow$

$$x_n - 2 = n^2 - n - 2 \Rightarrow x_n = (n-1)n \Rightarrow 1/a_n = (n-1)n \Rightarrow$$

$$a_n = 1/(n-1) - 1/n \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{1998} = 1/2 - 1/1997$$

16)

A sequência $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ possui como equação característica $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ou $x_2 = 1$.Assim: $a_n = A \cdot 2^n + B$ Para $n = 0 \Rightarrow a_0 = A + B$ Para $n = 1 \Rightarrow a_1 = 2A + B$ Segue então que $A = a_1 - a_0$ e $B = 2a_0 - a_1$

$$\text{Assim: } a_n = (a_1 - a_0)2^n + 2a_0 - a_1 \Rightarrow a_n = (2^n - 2)(a_1 - a_0) + a_1$$

Como a_1 e a_0 são inteiros com $a_1 > a_0$ então $a_1 - a_0 \geq 1$: $a_n \geq 2^n - 2 + a_1 \Rightarrow$

$$a_{100} > 2^{99}$$

17)

Sejam $a_1 = x$ e $a_2 = y$.Então a sequência é dada por: $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = y - x$, $a_4 = -x$, $a_5 = -y$, $a_6 = x - y$, $a_7 = x$, $a_8 = y$, $a_9 = y - x$, $a_{10} = -x$, ...Notemos que a_n é uma sequência periódica de período 6 e que a soma de todos 6 termos consecutivos é igual a 0.Seja S_n a soma dos n primeiros termos:

$$S_{1997} = S_{1998} - a_{1998} = 0 - (x - y) = y - x = 1879$$

$$S_{1879} = S_{1878} + a_{1879} = 0 + x = 1997$$

$$\text{Então } x = 1997 \text{ e } y = 3876$$

$$S_{2000} = S_{1998} + a_{1999} + a_{2000} = 0 + x + y = 5873$$

18)

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 \Rightarrow a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 2.$$

$$\text{Fazendo } b_n = a_{n+1} - a_n \Rightarrow b_{n+1} = b_n + 2, \text{ com } b_1 = 1$$

Observe que:

$$b_2 - b_1 = 2$$

$$b_3 - b_2 = 2$$

$$b_4 - b_3 = 2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$b_n - b_{n-1} = 2$$

$$\text{Somando estas equações: } b_n - b_1 = 2n - 2 \Rightarrow b_n = 2n - 1 \Rightarrow$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n - 1, \text{ com } a_1 = 1, a_2 = 2$$

Note que:

$$a_2 - a_1 = 1$$

$$a_3 - a_2 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 5$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n - 1$$

$$\text{Somando: } a_{n+1} - a_1 = n^2 \Rightarrow a_{n+1} = n^2 + 1 \Rightarrow$$

$$a_n = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$$

$$\text{Logo: } a_n \cdot a_{n+1} = (n^2 - 2n + 2)(n^2 - 2n + 3) = n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 2 =$$

$$= (n^2 - n + 1)^2 + 1 \Rightarrow a_n a_{n+1} = a_{n^2 - n + 1}.$$

19)

$$a_{n+1} = a_n + 1/a_n \Rightarrow (a_{n+1})^2 = (a_n + 1/a_n)^2 \Rightarrow$$

$$(a_{n+1})^2 = (a_n)^2 + 2 + (1/a_n)^2 \Rightarrow (a_{n+1})^2 - (a_n)^2 = (1/a_n)^2 + 2$$

Escrevendo esta equação para vários valores de n temos:

$$a_2^2 - a_1^2 = 1/a_1^2 + 2$$

$$a_3^2 - a_2^2 = 1/a_2^2 + 2$$

$$a_4^2 - a_3^2 = 1/a_3^2 + 2$$

$$a_5^2 - a_4^2 = 1/a_4^2 + 2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 1/a_n^2 + 2$$

Somando todos os termos e cortando os elementos comuns:

$$a_{n+1}^2 - a_1^2 = (1/a_1^2 + 1/a_2^2 + 1/a_3^2 + \dots + 1/a_n^2) + 2n \Rightarrow$$

$$a_{n+1}^2 = [(1/a_1^2 + 1/a_2^2 + 1/a_3^2 + \dots + 1/a_n^2) + a_1^2] + 2n$$

$$\text{Como } [(1/a_1^2 + 1/a_2^2 + 1/a_3^2 + \dots + 1/a_n^2) + a_1^2] > 0 \Rightarrow$$

$$a_{n+1}^2 > 2n \Rightarrow a_{1996}^2 > 2(1996) \Rightarrow a_{1996} > (3992)^{1/2} \Rightarrow$$

$$a_{1996} > 63,18 \Rightarrow a_{1996} > 63$$

20)

Observemos que: $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\dots+\sqrt{1991}}}} < 2 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\dots+\sqrt{1991}}}} < 2^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+\dots+\sqrt{1991}}}} < 3^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{6+\dots+\sqrt{1991}}}} < 7^2 - 3 = 46$$

Deste modo, podemos formar a sequência dos termos que aparecem da direita da desigualdade:

$$a_{n+1} = a_n^2 - n, \text{ onde } a_1 = 2.$$

Assim, para provar a desigualdade, bastaríamos ter $a_n > n$, que vai ser provado por indução:

i) $a_2 = 3 > 2$

ii) Suponhamos que $a_n > n$, ou seja, $a_n \geq n + 1$

iii) $a_{n+1} = a_n^2 - n \geq (n+1)^2 - n = n^2 + 2n + 1 - n = n^2 + n + 1 > n + 1$

Assim, podemos formar a soma:

$$a_{1991} > 1991 > \sqrt{1991} \Leftrightarrow a_{1990}^2 - 1990 > \sqrt{1991}$$

21)

$$a_{n+1} = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 - 1 = a_n(a_n + 1) - 1 \Rightarrow a_{n+1} - a_n + 1 = a_n^2$$

Escrevendo desde $n = 6$ até $n = 70$:

$$a_7 - a_6 + 1 = a_6^2$$

$$a_8 - a_7 + 1 = a_7^2$$

$$a_9 - a_8 + 1 = a_8^2$$

...

$$a_{71} - a_{70} + 1 = a_{70}^2$$

$$\text{Somando: } a_{71} - a_6 + 65 = a_6^2 + a_7^2 + \dots + a_{70}^2 =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + \dots + a_{70}^2 - 55 \Rightarrow$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + \dots + a_{70}^2 = a_{71} - 119 + 120 = a_{71} + 1 =$$

$$= a_{70} a_{69} \dots a_2 a_1$$

22)

Seja U_n o resto da divisão de u_n por 1986, isto é, $U_n \equiv u_n \pmod{1986}$. Considere a sequência de pares (U_n, U_{n+1}) . Note que existem no máximo 1986 pares distintos.

Como a sequência u_n é infinita certamente teremos pares repetidos. Seja $(U_p, U_{p+1}) = (U_q, U_{q+1})$ a primeira repetição com $q > p$.

$$\text{Como } u_{p+1} = u_p^2 - u_{p-1} \Rightarrow u_{p-1} \equiv U_p^2 - U_{p+1} \pmod{1986} \Rightarrow$$

$$U_{p-1} \equiv U_p^2 - U_{p+1} \pmod{1986}$$

$$\text{Analogamente } u_{q+1} = u_q^2 - u_{q-1} \Rightarrow u_{q-1} \equiv U_q^2 - U_{q+1} \pmod{1986} \Rightarrow$$

$$U_{q-1} \equiv U_q^2 - U_{q+1} \pmod{1986}$$

$$\text{Como } U_p = U_q \text{ e } U_{p+1} = U_{q+1} \Rightarrow U_{p-1} = U_{q-1}$$

Desta forma temos que $(U_{p-1}, U_p) = (U_{q-1}, U_q)$, implicando que temos uma sequência periódica, pois da última igualdade podemos provar que

$$(U_{p-2}, U_{p-1}) = (U_{q-2}, U_{q-1}), \text{ que implica também que}$$

$$(U_{p-3}, U_{p-2}) = (U_{q-3}, U_{q-2}), \text{ e assim por diante.}$$

Evidentemente vamos analisar a sequência a partir do primeiro termo, ou seja, $p = 1$, implicando que temos uma sequência (U_n, U_{n+1}) de período $q - 1$.

Como $u_3 = 1986 \Rightarrow 0 = U_3 = U_3 + k(q-1)$, ou seja, 1986 divide todos os termos $u_{3+k(q-1)}$ para todo k inteiro.

23)

$$\text{Temos que } 2ka_k - (2k-3)a_{k-1} = 0 \Rightarrow 2ka_k - 2(k-1)a_{k-1} = -a_{k-1}$$

$$2.2.a_2 - 2.1.a_1 = -a_1$$

$$2.3.a_3 - 2.2.a_2 = -a_2$$

$$2.4.a_4 - 2.3.a_3 = -a_3$$

$$2.5.a_5 - 2.4.a_4 = -a_4$$

$$\dots\dots\dots$$

$$2.n.a_n - 2.(n-1).a_{n-1} = -a_{n-1}$$

$$2.(n+1).a_{n+1} - 2.n.a_n = -a_n$$

$$\text{Somando: } -S = 2(n+1)a_{n+1} - 2a_1 \Rightarrow S = 2a_1 - 2(n+1)a_{n+1} \Rightarrow$$

$$S = 1 - 2(n+1)a_{n+1} \Rightarrow S < 1$$

24)

Suponhamos, inicialmente, que cada a_i ($0 \leq i \leq 2000$) é diferente de 0, uma vez que se para algum i tenhamos $a_i = 0 \Rightarrow a_{i+1} = 0 \Rightarrow$

$$a_{i+2} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_{2000} = 0.$$

Escrevendo a expressão dada para $n-1$ e n ($1 \leq n \leq 2000$) temos:

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{n-1}^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})^2$$

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{n-1}^3 + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)^2$$

Subtraindo, obtemos:

$$a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)^2 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})^2 \Rightarrow$$

$$a_n^3 = a_n(2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n) \Rightarrow$$

$$a_n^2 = 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

Escrevendo (1) para $n-1$ temos que:

$$a_{n-1}^2 = 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{n-2} + a_{n-1} \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2) obtemos:

$$a_n^2 - a_{n-1}^2 = a_{n-1} + a_n \Rightarrow (a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1}) = a_n + a_{n-1} \Rightarrow$$

$$a_n = a_{n-1} + 1 \text{ que é uma progressão aritmética de razão igual a } 1.$$

Para $n=1$ temos que: $a_1^3 = a_1^2 \Rightarrow a_1 = 0$ ou $a_1 = 1$.

Como já analisamos o caso em que $a_1 = 0$, se $a_1 = 1$:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)(1) \Rightarrow a_n = n \quad (1 \leq n \leq 2000)$$

implicando que cada termo de a_n seja inteiro.

25)

A equação característica é $x^2 - 14x + 1 = 0$, com raízes

$$7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2.$$

$$\text{Assim, o termo geral é } a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^{2n-1} + (2 - \sqrt{3})^{2n-1}}{4}$$

$$\text{Desenvolvendo obtém-se: } 2a_n - 1 = \frac{(\sqrt{(2 + \sqrt{3})^{2n-1}} - \sqrt{(2 - \sqrt{3})^{2n-1}})^2}{2}.$$

Além disso, as duas expressões entre parênteses podem ser escritas como

$$(2 + \sqrt{3})^{2n-1} = 2 \left(\frac{(\sqrt{3} + 1)^{2n-1}}{2^n} \right)^2 \text{ e } (2 - \sqrt{3})^{2n-1} = 2 \left(\frac{(\sqrt{3} - 1)^{2n-1}}{2^n} \right)^2.$$

$$\text{Assim: } 2a_n - 1 = \left[\frac{(\sqrt{3} + 1)^{2n-1} - (\sqrt{3} - 1)^{2n-1}}{2^n} \right]^2.$$

26)

Desde que $a_3 = 70$ e $a_4 = 180$ tem-se que $1 + 5a_3a_4 = 63001 = 251^2$.

Vamos mostrar que $n=3$ é a única solução.

Sejam $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e seja F_n a sequência de Fibonacci, dada

$$\text{por } F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Como as soluções da equação característica $x^2 - 3x + 1 = 0$ são α^2 e β^2 a sequência a_n é dada por:

$$a_n = 10\beta^2\alpha^{2n} + 10\alpha^2\beta^{2n} = 10(\alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2})$$

$$\text{Logo, conclui-se que } 1 + 5a_na_{n+1} = 501 + (50F_{2n-1})^2$$

Supondo que $1 + 5a_na_{n+1} = k^2$: $501 = (k - 50F_{2n-1})(k + 50F_{2n-1})$

$$\text{i) } \begin{cases} k - 50F_{2n-1} = 3 \\ k + 50F_{2n-1} = 167 \end{cases} \Rightarrow 25F_{2n-1} = 41, \text{ que é impossível}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} k - 50F_{2n-1} = 1 \\ k + 50F_{2n-1} = 501 \end{cases} \Rightarrow F_{2n-1} = 5 \Rightarrow n = 3.$$

11.2. PARTE B

$$1) [7 \cdot 2^{n-1} + (-1)^n]/3$$

2) Dica: Mostre que existem dois números consecutivos da sequência de Fibonacci que deixam o mesmo resto na divisão por 10^n .

3) Dica: Faça $x_n = \text{tg } y_n$ e mostre que $x_{n+1} = x_n + 6$.

4) Dica: Reescreva a equação da forma $(a_{n+1} - 2a_n)^2 - 3a_n^2 = -2$ e analise como equação de Pell.

5) 8. Dica: Separe a soma em duas somas de PG.

6) $k = 2000, 1000, 500, 400, 200, 100$. Dica: Demonstre que a sequência é periódica.

7) Dica: Analise o resto da divisão por 4 dos termos, encontrando um período.

8) 6984. Dica: Demonstre que $a_n = a_{n+20}$

9) Dica: Analise a sequência módulo 8.

10) 108. Dica: Prove que $a_n = 5[5^{n+2} + 2(-1)^n - 3]/6$ e depois use o teorema de Euler.

11) -1. Dica: Mostre que a sequência é periódica.

12) Dica: Prove que $x_n \equiv 365 \pmod{1987}$ e $y_n \equiv 16 \pmod{1987}$

13) Dica: Prove, por indução, que a_n termine em 2^n 9's.

14) Dica: Determine a_n e depois expanda em binômio de Newton as duas parcelas irracionais.

15) Dica: Mostre que os restos da divisão por 4 dos termos da sequência são 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...

16) Dica: Demonstre, por indução, que $a_n = n^2$.

17) Dica: Mostre que a_n é igual a um número binomial.

18) Se n par $f(n) = 1$ e se n ímpar $f(n) = n$. Dica: Use indução.

19) Dica: Use indução.

20) Dica: Veja a solução do exercício proposto 25 da parte A.

21) Dica: Demonstre que $\frac{x_n + x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+2} + x_{n+4}}{x_{n+3}}$ e depois determine x_n .

22) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} - n - 1$. Dica: Demonstre que é equivalente a $a_{n+4} - 7a_{n+3} + 18a_{n+2} - 20a_{n+1} + 8a_n = 0$.

23) Dica: Demonstre que $a_n = \frac{(\sqrt{3}+1)^{2n+1} + (\sqrt{3}-1)^{2n+1}}{2^{n+1}\sqrt{3}}$ e depois prove que $a_n \mid a_{3n+1}$.

TRIGONOMETRIA

12.1. PARTE A

1)

$$\cos x = \cos y \Rightarrow x = \pm y + 2k\pi$$

$$\sin x = -\sin y \Rightarrow \sin x = \sin(-y) \Rightarrow$$

$$x = -y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + y + 2k\pi$$

Assim, existem dois casos a considerar:

$$\text{i) } x = -y + 2k\pi \Rightarrow 1994x = -1994y + 2k'\pi \Rightarrow$$

$$\sin 1994x = -\sin 1994y$$

$$\text{ii) } y + 2k\pi = \pi + y + 2k'\pi, \text{ que é impossível}$$

2)

$$\text{Como } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}:$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} + 1\right) = \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right) \left(\frac{\sqrt{5}+3}{4}\right) = \\ &= \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{32} = \frac{9-5}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

3)

$$\text{Seja } g(x) = \sin(x^2).$$

$$\text{Suponhamos que } g \text{ possua período } p: g(x) = g(x+p) = g(x-p) \Rightarrow$$

$$\sin(x^2 + p^2 + 2px) = \sin(x^2 + p^2 - 2px) \Rightarrow$$

$$\sin(x^2 + p^2 + 2px) - \sin(x^2 + p^2 - 2px) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot \cos(p^2 + x^2) \cdot \sin(2px) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Assim, a igualdade acima somente é válida para $p = 0$, implicando que g não é periódica.

4)

Solução:

$$\underbrace{\arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_A + \underbrace{\arctg\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)}_B = \underbrace{\arctg\left(\frac{23}{36}\right)}_C \Rightarrow B = C - A \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{tg } B &= \frac{\text{tg } C - \text{tg } A}{1 + \text{tg } C \cdot \text{tg } A} \Rightarrow \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{\frac{23}{36} - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{23}{36} \cdot \frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{36(x+1)}{36(x+1)+23(x-1)} = \frac{23x+23-36x+36}{36x+36+23x-23} = \frac{59-13x}{13+59x} \Rightarrow$$

$$(2x-1)(13+59x) = (2x+1)(59-13x) \Rightarrow$$

$$118x^2 + 33x - 13 = -26x^2 + 105x + 59 \Rightarrow 144x^2 - 72x + 18 = 0 \Rightarrow$$

$$8x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{não existe } x \text{ real que satisfaça a equação.}$$

5)

Fazendo $\operatorname{tg} x = t$ tem-se que $\operatorname{tg} x + \cot x = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2+1}{t} \Rightarrow$

$\operatorname{tg} x + \cot x \geq 2$ ou $\operatorname{tg} x + \cot x \leq -2 \Rightarrow \operatorname{sen} nx \geq 1$ ou $\operatorname{sen} nx \leq -1$

Como $-1 \leq \operatorname{sen} nx \leq 1$ tem-se que $\operatorname{sen} nx = \pm 1 \Rightarrow$

$$nx = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \quad (1)$$

Porém, deve-se ter $\operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (2)$

Logo, observando as equações (1) e (2) conclui-se que $n = 2$.

6)

$$\operatorname{tg}^2 2x + 2 \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 1 \Rightarrow 2 \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 1 - \operatorname{tg}^2 2x \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2x}{2 \operatorname{tg} 2x} \Rightarrow \operatorname{tg} 3x = \frac{1}{\operatorname{tg} 4x} \Rightarrow \operatorname{tg} 3x = \cot 4x \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right)$$

$$\text{i) } 3x = \frac{\pi}{2} - 4x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii) } 3x = \pi + \frac{\pi}{2} - 4x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

7)

Substituindo $\cos x = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} : a \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right) \pm b \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} + c = 0 \Rightarrow$

$$a^2 \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2) \cos 2x + a^2 + 4ac + 4c^2 - 2b^2 = 0$$

Para $a = 4$, $b = 2$ e $c = -1$ segue que:

$$4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0 \text{ e } 4(4 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - 1) = 0$$

ou seja, as equações são equivalentes.

8)

Considere a equação $\cos 3x = \cos 2x$.

$$\text{i) } 3x = 2x + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\text{ii) } 3x = -2x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}$$

$$\cos 3x = \cos 2x \Rightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow$$

$$4 \cos^3 x - 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(\cos x - 1)(4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1) = 0$$

Fazendo $\cos x = t$ segue-se que $\cos 0$, $\cos 72^\circ$ e $\cos 144^\circ$ são raízes da equação $(t-1)(4t^2+2t-1)=0$, ou seja, $\cos 72^\circ$ e $\cos 144^\circ$ são raízes da equação $4t^2+2t-1=0$

9)

$$\text{a) } \cos(4\alpha) = \cos(3\alpha) \Leftrightarrow 4\alpha = 3\alpha + 2k\pi \text{ ou } 4\alpha = -3\alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \text{ ou}$$

$$\alpha = \frac{2k\pi}{7}, \text{ logo } 1, \cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7} \text{ são as raízes dessa equação.}$$

Por outro lado temos que $\cos(4\alpha) = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$ e

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \text{ Faça } \cos \alpha = t. \text{ Daí temos que}$$

$$\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha) \Leftrightarrow (t-1)(8t^3+4t^2-4t-1) = 8t^4-4t^3-8t^2+3t+1=0$$

Assim, a equação $8t^4+4t^2-4t-1=0$ tem como soluções

$$\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}.$$

10)

Como $x, y, z > 0$ então os 4 termos do lado esquerdo da igualdade fornecida são todos menores que 1.

Particularmente tem-se $0 < y^2, z^2 < 1 \quad (1)$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \Rightarrow x^2 + (2yz)x + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2yz \pm \sqrt{4y^2z^2 - 4(y^2 + z^2 - 1)}}{2} = -yz \pm \sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} \quad (2)$$

Do resultado (1) segue que existem arcos $B/2$ e $C/2$ tais que $y = \operatorname{sen}(B/2)$

e $z = \operatorname{sen}(C/2)$, com $0 < B/2, C/2 < 90^\circ$:

Assim, substituindo no resultado (2):

$$x = -\operatorname{sen}(B/2) \operatorname{sen}(C/2) + \cos(B/2) \cos(C/2) = \cos(B/2 + C/2)$$

$$\text{Como } x > 0 \text{ então } \cos(B/2 + C/2) > 0 \Rightarrow 0 < B/2 + C/2 < \pi/2 \Rightarrow$$

$$0 < B + C < 180^\circ$$

Assim, existe um ângulo A tal que $\operatorname{sen}(A/2) = \cos(B/2 + C/2) \Rightarrow$

$$90^\circ - A/2 = B/2 + C/2 \Rightarrow A + B + C = 180^\circ$$

11)

$$\cos A + \cos B + \cos C =$$

$$\begin{aligned} & 2.\cos(A/2 + B/2).\cos(A/2 - B/2) + 1 - 2.\sin^2(C/2) = \\ & = 1 + 2.\sin(C/2).\cos(A/2 - B/2) - 2.\sin^2(C/2) = \\ & = 1 + 2.\sin(C/2)[\cos(A/2 - B/2) - \cos(A/2 + B/2)] = \\ & = 1 + 2.\sin(A/2).\sin(B/2).\sin(C/2) \end{aligned}$$

12)

Percebemos que $1 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow 4y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2y \leq 1$

Podemos fazer, então, $2y = \sin A$

Como x é um número real, podemos fazer $x = \tan B$.

$$\text{Aplicando na equação: } \frac{\sin A}{2}(1 + \tan^2 B) = \tan B(\sqrt{1 - \sin^2 A} - 1) \Rightarrow$$

$$(\sin A)(1 + \tan^2 B) = 2.\tan B.(|\cos A| - 1) \Rightarrow$$

$$(\sin A).\tan^2 B + 2(1 - |\cos A|).\tan B + \sin A = 0$$

Resolvendo esta equação de 2º grau em $\tan B$:

$$\tan B = \frac{2|\cos A| - 2 \pm \sqrt{4 - 8|\cos A| + 4\cos^2 A - 4\sin^2 A}}{2\sin A} \Rightarrow$$

$$\tan B = \frac{2|\cos A| - 2 \pm \sqrt{4 - 8|\cos A| + 4\cos^2 A + 4\cos^2 A - 4}}{2\sin A} \Rightarrow$$

$$\tan B = \frac{|\cos A| - 1 \pm \sqrt{2(\cos^2 A - |\cos A|)}}{\sin A}$$

Desde que para $0 < A < 2\pi$ temos $\cos^2 A < |\cos A|$, então a única possibilidade é $\cos^2 A = |\cos A|$, ou seja, $\cos A = 0$ ou $\cos A = 1$ ou $\cos A = -1$.

Note que se $\cos A = 1$ ou $-1 \Rightarrow \sin A = 0 \Rightarrow \tan B = 0/0$, que é uma indeterminação.

Se $\cos A = 0$, temos duas possibilidades:

$$\text{i) } \sin A = 1 \Rightarrow \tan B = -1 \Rightarrow xy = (\sin A)(\tan B)/2 = -1/2;$$

$$\text{ii) } \sin A = -1 \Rightarrow \tan B = 1 \Rightarrow xy = (\sin A)(\tan B)/2 = -1/2.$$

Assim, sempre teremos $xy = -1/2$.

13)

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(1^\circ)}{\cos(n).\cos(n+1)} = \frac{\sin[(n+1) - n]}{\cos(n).\cos(n+1)} = \\ & = \frac{\sin(n+1).\cos(n) - \sin(n).\cos(n+1)}{\cos(n).\cos(n+1)} = \tan(n+1) - \tan(n) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ} = \\ & = \frac{\tan 1^\circ - \tan 0^\circ + \tan 2^\circ - \tan 1^\circ + \dots + \tan 89^\circ - \tan 88^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{\tan 89^\circ - \tan 0^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ} \end{aligned}$$

14)

$$S = 2.\sin 2^\circ + 4.\sin 4^\circ + \dots + 176.\sin 176^\circ + 178.\sin 178^\circ + 180.\sin 180^\circ$$

Como $\sin x = \sin(180^\circ - x)$ e $\sin 180^\circ = 0$:

$$S = 2.\sin 178^\circ + 4.\sin 176^\circ + \dots + 4.\sin 176^\circ + 2.\sin 178^\circ$$

Somando:

$$2S = 180(\sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \dots + \sin 176^\circ + \sin 178^\circ) \Rightarrow$$

$$S.\sin 1^\circ = 90(\sin 2^\circ.\sin 1^\circ + \sin 4^\circ.\sin 1^\circ + \dots + \sin 176^\circ.\sin 1^\circ + \sin 178^\circ.\sin 1^\circ) \Rightarrow$$

$$S.\sin 1^\circ = 45(\cos 1^\circ - \cos 3^\circ + \cos 3^\circ - \cos 5^\circ + \dots + \cos 175^\circ - \cos 177^\circ + \cos 177^\circ - \cos 179^\circ) \Rightarrow$$

$$S.\sin 1^\circ = 45(\cos 1^\circ - \cos 179^\circ) = 45(\cos 1^\circ + \cos 1^\circ) \Rightarrow$$

$$S.\sin 1^\circ = 90.\cos 1^\circ \Rightarrow \frac{S}{90} = \cot 1^\circ$$

15)

Suponhamos que $\pi/2 > a \geq b > 0$

$$\sin^2 a + \sin^2 b = \sin(a + b) \Rightarrow$$

$$\sin^2 a + \sin^2 b = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a \Rightarrow$$

$$\sin a(\sin a - \cos b) = \sin b(\cos a - \sin b) \Rightarrow$$

$$\sin a \left[\sin a - \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \right] = \sin b \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \sin b \right] \Rightarrow$$

$$2.\sin a.\sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2.\sin b.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{Note que } \alpha = -\beta \Rightarrow \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\text{Como } \theta + \gamma = \pi/2 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Assim: } \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sin a.\cos\left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin b.\sin\left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] = 0$$

Logo, existem duas possibilidades:

$$\text{i) } \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow a + b = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ii) } \sin a.\cos\left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin b.\sin\left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Como $\pi/2 > a \geq b > 0$ segue que $0 < \frac{a-b}{2} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

Assim, nunca teremos $\sin a \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin b \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ igual a zero, uma vez que todos os termos são estritamente positivos.

Portanto, a única possibilidade é $a + b = \frac{\pi}{2}$.

16)

$$\begin{aligned} P &= |\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x| = \\ &= \left| \sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right| = \\ &= \left| \frac{\sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x) + \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x} \right| = \\ &= \left| \frac{1 + (1 + \sin x \cdot \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x \cdot \cos x} \right| = \left| \frac{2 + (2 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x)(\sin x + \cos x)}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} \right| \end{aligned}$$

Sabe-se que $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

Logo, fazendo $\sin x + \cos x = t$:

$$P = \left| \frac{2 + (2 + t^2 - 1)t}{t^2 - 1} \right| = \left| \frac{2 + t + t^3}{t^2 - 1} \right| = \left| \frac{(t+1)(t^2 - t + 2)}{(t+1)(t-1)} \right| = \left| \frac{t^2 - t + 2}{t-1} \right| = \left| t + \frac{2}{t-1} \right| \Rightarrow$$

$$P = \left| t - 1 + \frac{2}{t-1} + 1 \right|$$

Se $t - 1 > 0$ o pode-se aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$t - 1 + \frac{2}{t-1} \geq 2\sqrt{(t-1) \cdot \frac{2}{t-1}} \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow P \geq 1 + 2\sqrt{2}$$

Analogamente, se $t - 1 < 0$, segue que:

$$t - 1 + \frac{2}{t-1} \leq -2\sqrt{2} \Rightarrow \left| t + \frac{2}{t-1} \right| \geq 2\sqrt{2}$$

$$\text{Assim: } P = \left| t - 1 + \frac{2}{t-1} + 1 \right| \geq \left| t + \frac{2}{t-1} \right| - 1 \geq 2\sqrt{2} - 1$$

Logo, o valor mínimo de $|\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x|$ é $2\sqrt{2} - 1$.

17)

$$\begin{aligned} \cos^3 3x + \cos^3 5x &= 8 \cdot \cos^3 4x \cdot \cos^3 x \Rightarrow \\ (\cos 3x + \cos 5x)(\cos^2 3x - \cos 3x \cdot \cos 5x + \cos^2 5x) &= 8 \cdot \cos^3 4x \cdot \cos^3 x \Rightarrow \\ 2 \cdot \cos 4x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 3x - \cos 3x \cdot \cos 5x + \cos^2 5x) &= 8 \cdot \cos^3 4x \cdot \cos^3 x \end{aligned}$$

Assim, se $\cos 4x \cdot \cos x = 0$ a equação é satisfeita:

$$\text{i) } \cos 4x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow x = \pm 22,5^\circ + 90^\circ \cdot k \Rightarrow x = 112,5^\circ \text{ ou } x = 157,5^\circ$$

Para $\cos 4x \cdot \cos x \neq 0$ a equação fica da forma:

$$\begin{aligned} \cos^2 3x - \cos 3x \cdot \cos 5x + \cos^2 5x &= 4 \cdot \cos^2 4x \cdot \cos^2 x \Rightarrow \\ \cos^2 3x - \cos 3x \cdot \cos 5x + \cos^2 5x &= (\cos 5x + \cos 3x)^2 \Rightarrow \\ \cos^2 3x - \cos 3x \cdot \cos 5x + \cos^2 5x &= \cos^2 5x + 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 3x + \cos^2 3x \Rightarrow \\ \cos 3x \cdot \cos 5x &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \cos 3x = 0 \Rightarrow x = \pm 30^\circ + 120^\circ \cdot k \Rightarrow x = 150^\circ$$

$$\text{iii) } \cos 5x = 0 \Rightarrow x = \pm 18^\circ + 72^\circ \cdot k \Rightarrow x = 126^\circ \text{ ou } x = 162^\circ \text{ ou } x = 198^\circ$$

Assim, a soma de todos os x que satisfazem o enunciado é:

$$112,5^\circ + 157,5^\circ + 150^\circ + 126^\circ + 162^\circ + 198^\circ = 906^\circ$$

18)

Sabe-se que as raízes da equação $x^7 - 1 = 0$ são da forma:

$$x = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{7}, \text{ com } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Como a soma das raízes desta equação é igual a 0:

$$\begin{aligned} \cos 0 + \cos 2\pi/7 + \cos 4\pi/7 + \cos 6\pi/7 + \cos 8\pi/7 + \cos 10\pi/7 + \cos 12\pi/7 &= 0 \Rightarrow \\ 1 + \cos 2\pi/7 - \cos 3\pi/7 - \cos \pi/7 - \cos \pi/7 - \cos 3\pi/7 + \cos 2\pi/7 &= 0 \Rightarrow \\ 2(\cos \pi/7 - \cos 2\pi/7 + \cos 3\pi/7) &= 1 \Rightarrow \cos \pi/7 - \cos 2\pi/7 + \cos 3\pi/7 = 1/2 \end{aligned}$$

19)

Sabe-se que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Logo:

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos 3y + \cos 3z &= 0 \Rightarrow \\ 4(\cos^3 x + \cos^3 y + \cos^3 z) - 3(\cos x + \cos y + \cos z) &= 0 \Rightarrow \\ \cos^3 x + \cos^3 y + \cos^3 z &= 0 \end{aligned}$$

Da fatoração $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$, fazendo $a = \cos x$, $b = \cos y$ e $c = \cos z$ segue que $\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = 0$.

Suponhamos que $\cos z = 0 \Rightarrow \cos y = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos 2y$

Por outro lado, se $\cos z = 0$ então $\cos 2z = -1$.

Assim: $\cos 2x \cdot \cos 2y \cdot \cos 2z = -\cos^2 2x \leq 0$

20)

Seja $z = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$

$$\text{i) } (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)^5 = \cos 5\theta + i \cdot \sin 5\theta$$

$$\cos 5\theta = \left(\begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \right) \cos^5 \theta - \left(\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right) \cos^3 \theta \cdot \sin^2 \theta + \left(\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right) \cos \theta \cdot \sin^4 \theta \Rightarrow$$

$$\cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \Rightarrow$$

$$\cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 10 \cos^5 \theta + 5 \cos \theta - 10 \cos^3 \theta + 5 \cos^5 \theta \Rightarrow$$

$$\cos 5\theta = 16 \cdot \cos^5 \theta - 20 \cdot \cos^3 \theta + 5 \cdot \cos \theta \quad (1)$$

$$\text{ii) } (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)^7 = \cos 7\theta + i \cdot \sin 7\theta$$

$$\cos 7\theta = \binom{7}{0} \cos^7 \theta - \binom{7}{2} \cos^5 \theta \cdot \sin^2 \theta + \binom{7}{4} \cos^3 \theta \cdot \sin^4 \theta - \binom{7}{6} \cos \theta \cdot \sin^6 \theta \Rightarrow$$

$$\cos 7\theta = \cos^7 \theta - 21 \cos^5 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 35 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 - 7 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^3 \Rightarrow$$

$$\cos 7\theta = \cos^7 \theta - 21 \cos^5 \theta + 21 \cos^7 \theta + 35 \cos^3 \theta - 70 \cos^5 \theta + 35 \cos^7 \theta - 7 \cos \theta +$$

$$+ 21 \cos^3 \theta - 21 \cos^5 \theta + 7 \cos^7 \theta \Rightarrow$$

$$\cos 7\theta = 64 \cos^7 \theta - 112 \cos^5 \theta + 56 \cos^3 \theta - 7 \cos \theta \quad (2)$$

$$\text{Além disso, sabe-se que } \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad (3)$$

Multiplicando a equação (1) por 7:

$$7 \cos 5\theta = 112 \cos^5 \theta - 140 \cos^3 \theta + 35 \cos \theta \quad (4)$$

Somando as equações (2) e (4):

$$\cos 7\theta + 7 \cos 5\theta = 64 \cos^7 \theta - 84 \cos^3 \theta + 28 \cos \theta \quad (5)$$

$$\text{Multiplicando a equação (3) por 21: } 21 \cos 3\theta = 84 \cos^3 \theta - 63 \cos \theta \quad (6)$$

Somando as equações (5) e (6):

$$\cos 7\theta + 7 \cos 5\theta + 21 \cos 3\theta = 64 \cos^7 \theta - 35 \cos \theta \Rightarrow$$

$$64 \cos^7 \theta = \cos 7\theta + 7 \cos 5\theta + 21 \cos 3\theta + 35 \cos \theta \quad (7)$$

$$\theta \rightarrow \theta + 2\pi/3:$$

$$64 \cos^7 (\theta + 2\pi/3) = \cos (7\theta + 2\pi/3) + 7 \cos (5\theta + 4\pi/3) + 21 \cos 3\theta +$$

$$+ 35 \cos (\theta + 2\pi/3) \quad (8)$$

$$\theta \rightarrow \theta + 4\pi/3:$$

$$64 \cos^7 (\theta + 4\pi/3) = \cos (7\theta + 4\pi/3) + 7 \cos (5\theta + 2\pi/3) + 21 \cos 3\theta +$$

$$+ 35 \cos (\theta + 4\pi/3) \quad (9)$$

Observe que, para um α qualquer:

$$\sin \alpha + \sin (\alpha + 2\pi/3) + \sin (\alpha + 4\pi/3) =$$

$$= \sin \alpha + \sin \alpha \cdot \cos 2\pi/3 + \cos \alpha \cdot \sin 2\pi/3 + \sin \alpha \cdot \cos 4\pi/3 + \cos \alpha \cdot \sin 4\pi/3 =$$

$$\text{Como } \cos 2\pi/3 = \cos 4\pi/3 = -1/2 \text{ e } \sin 2\pi/3 = -\sin 4\pi/3, \text{ segue que:}$$

$$\sin \alpha + \sin (\alpha + 2\pi/3) + \sin (\alpha + 4\pi/3) = 0 \quad (10)$$

Assim, somando as equações (7), (8), (9) e aplicando (10):

$$64 \cos^7 \theta + 64 \cos^7 (\theta + 2\pi/3) + 64 \cos^7 (\theta + 4\pi/3) = 63 \cos 3\theta \Rightarrow$$

$$\cos^7 \theta + \cos^7 (\theta + 2\pi/3) + \cos^7 (\theta + 4\pi/3) = (63/64) \cos 3\theta$$

21)

$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} \Rightarrow$$

$$\sin(x+y+z) \cdot \cos x + \sin(x+y+z) \cdot \cos y + \sin(x+y+z) \cdot \cos z =$$

$$= \cos(x+y+z) \cdot \sin x + \cos(x+y+z) \cdot \sin y + \cos(x+y+z) \cdot \sin z \Rightarrow$$

$$\sin(x+y) + \sin(x+z) + \sin(y+z) = 0$$

Note agora que:

$$\frac{\cos x}{\cos(x+y+z)} = \frac{\cos[(x+y+z)-(y+z)]}{\cos(x+y+z)} =$$

$$= \frac{\cos(x+y+z) \cdot \cos(y+z) - \sin(x+y+z) \sin(y+z)}{\cos(x+y+z)} =$$

$$= \cos(y+z) - \cot(x+y+z) \cdot \sin(y+z) \quad (1)$$

Analogamente, pode-se demonstrar que:

$$\frac{\cos y}{\cos(x+y+z)} = \cos(x+z) - \cot(x+y+z) \cdot \sin(x+z) \quad (2)$$

$$\frac{\cos z}{\cos(x+y+z)} = \cos(x+y) - \cot(x+y+z) \cdot \sin(x+y) \quad (3)$$

Somando as expressões (1), (2) e (3):

$$a = \cos(x+y) + \cos(x+z) + \cos(y+z) -$$

$$- \cot(x+y+z) [\sin(x+y) + \sin(x+z) + \sin(y+z)] \Rightarrow$$

$$\cos(x+y) + \cos(x+z) + \cos(y+z) = a$$

12.2. PARTE B

1) 30° . Dica: Eleve as duas equações ao quadrado e depois adicione as duas.

$$2) x = k\pi \text{ ou } x = \pm \pi/3 + k\pi$$

3) 5π . Dica: Note que as raízes são recíprocas.

$$4) 23. \text{ Dica: Prove que } 1 + \operatorname{tg}(k) = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(k + 45^\circ)}{\cos k}$$

$$5) \frac{1}{2^{999}}$$

6) Dica: Some $\sin A + \sin B$ e faça $\sin C = \sin(A+B) = 2 \cdot \sin(A+B)/2 \cdot \cos(A+B)/2$.

$$7) \cos(\sin(\sin(\sin(\dots(\sin(\cos 1))\dots)))$$

8) Dica: A partir da expressão de $\operatorname{tg} 7\theta$ determine o polinômio de grau 3 cujas raízes sejam $\operatorname{tg}^2 \pi/7$, $\operatorname{tg}^2 2\pi/7$ e $\operatorname{tg}^2 3\pi/7$

9) Dica: Demonstre que $\sin(k\alpha) \cdot \sin \alpha/2 = \cos(k-1)\alpha - \cos(k+1)\alpha$

10) - 17/19. Dica: Demonstre que $P = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{z}{2} \right)^{k+1} i^k \right] = \frac{2 \cdot \cos \theta}{5 + 2 \cdot \sin \theta}$ e

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{iz}{2} \right)^k \right] = \frac{2 \cdot \sin \theta + 4}{5 + 2 \cdot \sin \theta}$$

11) Dica: Demonstre que $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$

12) Dica: Demonstre que $1/\sin 2^k x = \cot 2^{k-1} x - \cot 2^k x$

13) $\frac{49}{58}$

14) Se n par $x = k\pi$ e se n ímpar $x = 3\pi/2 + 2k\pi$. Dica: Prove que se $n > 2$ então $\cos^n x - \sin^n x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

15) 47

16) 251

17) $\pi/6 + k\pi, 5\pi/6 + k\pi, \pi/4 + k\pi, \pi/2$. Dica: Prove que $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1 = 2 \cdot \cos^2 x (2 \cdot \cos^2 x - 1)(4 \cdot \cos^2 x - 3)$

18) $\pi/4 \leq x \leq 7\pi/4$

19) a) Não existe λ ; b) $\lambda > 1/8$; c) $\lambda \in]0, 1/8[$; d) $\lambda = 1/8$

20) $\pi/4$ e $5\pi/4$. Dica: Desenvolva até encontrar $\sin 14x(\cos 4x + \sin 6x) = 2$.

21) $\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Olimpíadas Paraenses de Matemática - 2000 a 2009, Marcelo Rufino, VestSeller, 2010.

[2] Olimpíadas Brasileiras de Matemática: 9ª a 16ª, Carlos Moreira, Edmilson Motta, Eduardo Tengan, Luiz Amâncio, Nicolau Saldanha, Paulo Rodrigues, Sociedade Brasileira de Matemática, 2003

[3] Olimpíadas de Matemática do Cone Sul V a XII, A. Caminha, M. Mendes & P. Rodrigues, Papel Virtual, 2002.

[4] 10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática, Eduardo Wagner & Carlos Gustavo T. A. Moreira, OEI, 1996.

[5] Treinamento Cone Sul 2007, Bruno Holanda, Carlos Augusto, Samuel Barbosa & Yuri Lima, Realce, 2007.

[6] Treinamento Cone Sul 2008, Bruno Holanda, Cícero Magalhães, Samuel Barbosa & Yuri Lima, Realce, 2010.

[7] Problem Solving-Strategies, Arthur Engel, Springer, 1998.

[8] The IMO Compendium, A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004, Djuiki'c, D.; Jankovi'c, V.; Mati'c, I.; Petrovi'c, N., Springer, 2006.

[9] Mathematical Olympiads: Problems and Solutions From Around the World 1998-1999, T. Andreescu & Z. Feng, MAA, 2000.

[10] Mathematical Olympiads: Problems and Solutions From Around the World 1999-2000, T. Andreescu & Z. Feng, MAA, 2002.

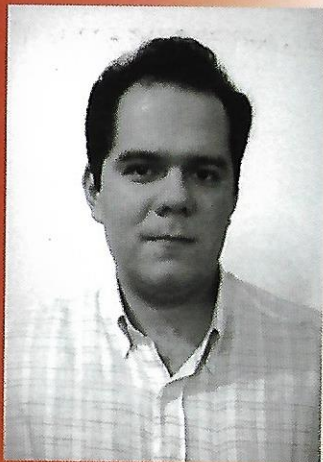
[11] Mathematical Olympiads: Problems and Solutions From Around the World 2000-2001, T. Andreescu, Z. Feng, G. Lee Jr, MAA, 2003.

[12] Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from around the World, 2001-2002, Andreescu, T.; Feng, Z.; Lee, G.; Loh, P., Mathematical Association of America, 2004.

[13] Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, D. Fomin & A. Kirichenko, Math Pro Press, 1994.

- [14] The Mathematical Olympiad Handbook: An Introduction to Problem Solving Based on the First 32 British Mathematical Olympiads 1965-1996, A. Gardner, Oxford Science Publications, 1997.
- [15] Problems in Algebra: From the Training of the USA IMO Team, T. Andreescu, Z. Feng, Australian Mathematics Trust, 2001.
- [16] 102 Combinatorial Problems: From the Training of the USA IMO Team, T. Andreescu, Z. Feng, Birkhäuser, 2003.
- [17] 103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team, T. Andreescu, Z. Feng, Birkhäuser, 2005.
- [18] Number Theory Problems (From the Training of the USA IMO Team), Titu Andreescu, Dorin Andrica & Zuming Feng, Birkhäuser, 2007.
- [19] The URSS Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics, D. O. Shklarsky, N. N. Chentsov & I. M. Yaglom, Dover Books, 1993.
- [20] Five Hundred Mathematical Challenges, E. Barbeau, M. S. Klamkin & W. Moser, MAA, 1995.
- [21] Mathematical Circles (Russian Experience), Dmitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, AMS, 1991.
- [22] Mathematical Olympiad Challenges, Titu Andreescu e Razvan Gelca, Birkhauser, 2000.
- [23] Mathematical Olympiads Treasures, T. Andreescu & B. Enescu, Birkhäuser, 2004.
- [24] Winning Solutions, Edward Lozansky e Cecil Rousseau, Springer, 1996.
- [25] Number Theory - Structures, Examples, and Problems, Titu Andreescu & Dorin Andrica, Birkhäuser; 2009.
- [26] Hungarian Problem Book, volumes I & II, New Mathematical, K'ursch'ak, J., Library, Vols. 11 & 12, Mathematical Association of America, 1967.

- [27] The Asian Pacific Mathematics Olympiad 1989-1993, Australian, Lausch, H., Mathematics Trust, 1994.
- [28] Tournament of Towns 1980-1984, Taylor, P. J., Australian Mathematics Trust, 1993.
- [29] Tournament of Towns 1984-1989, Taylor, P. J., Australian Mathematics Trust, 1992.
- [30] Tournament of Towns 1989-1993, Taylor, P. J., Australian Mathematics Trust, 1994.
- [31] Tournament of Towns 1993-1997, Taylor, P. J.; Storozhev, A., Australian Mathematics Trust, 1998.
- [32] Tournament of Towns 1997-2002, J.; Storozhev, A., Australian Mathematics Trust, 2006.
- [33] USSR Mathematical Olympiads 1989-1992, Slinko, A., Australian Mathematics Trust, 1997.
- [34] Chinese Mathematics Competitions and Olympiads 1981-1993, Liu, A., Australian Mathematics Trust, 1998.
- [35] Chinese Mathematics Competitions and Olympiads 1983-2001, Liu, A., Australian Mathematics Trust, 2005.
- [36] The Canadian Mathematical Olympiad 1969-1993, Doob, M., University of Toronto Press, 1993.
- [37] Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses - For Junior Section Vol. 1, World Scientific, Xu Jiagu, 2010.
- [38] Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses - For Junior Section Vol. 2, World Scientific, Xu Jiagu, 2010.
- [39] Inequalities - A Mathematical Olympiad Approach, Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega & Rogelio Valdez Delgado, Birkhäuser, 2009.



Marcelo Rufino de Oliveira nasceu em 1976 em Manaus-AM. Apesar de sua família ser radicada em Belém, já residiu em 9 cidades, devido às transferências de trabalho de seus pais. Ingressou em 1994 no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), onde graduou-se em Eng. Mecânica-Aeronáutica em 1999, porém nunca exerceu a engenharia. Desde então trabalha com preparação para concursos militares e olimpíadas de matemática de níveis fundamental e médio em Belém. Em 2000 assumiu a coordenação regional da Olimpíada Brasileira de Matemática no estado do Pará, sendo também responsável pela organização da Olimpíada Paraense de Matemática. Em 2002 participou da banca corretora da Olimpíada de Matemática do Cone Sul, realizada em Fortaleza-CE. Aproveita suas horas vagas para viajar de motocicleta com seus amigos do Pará Moto Clube, além de participar de algumas competições off-road com seu jipe 4x4.

TÉCNICAS EM OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA - ÁLGEBRA

Marcelo Rufino de Oliveira



www.vestseller.com.br

